ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА И ФОРМУЛЫ

1. Градусная и радианная меры углов

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в **1 радиан**.

*,*

Примеры с решениями.

1. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

а) 160; б) 1440

Решение.

а) Используя формулу , подставим:

б)

2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

а) 0,3π; б) ;

Решение.

а) Используя формулу *,* подставим

б)

**Таблица основных углов**



**Графики тригонометрических функций**

1. **Функция *f(x)=sinx***

Таблица значений

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | **0** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **0** | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | **360** |
| sin α | 0 |  |  |  | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  | 0 |

|  |
| --- |
| синусоида |

1. **Функция *f(x)=cosx***

Таблица значений

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | **0** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **0** | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | **360** |
| cos α | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | -1 |  |  |  | 0 |  |  |  | 1 |

|  |
| --- |
| косинусоида |

1. **Функция *f (x)=tgx***

Таблица значений

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | **0** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **0** | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | **360** |
| tg α | 0 |  | 1 |  | - |  | -1 |  | 0 |  | 1 |  | - |  | -1 |  | 0 |

|  |
| --- |
| тангенсоида |

1. **Функция *f(x)=ctgx***

Таблица значений

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | **0** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **0** | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | **360** |
| сtg α | - |  | 1 |  | 0 |  | -1 |  | - |  | 1 |  | 0 |  | -1 |  | - |

|  |
| --- |
| котангенсоида |

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ.

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю (и этот предел существует), называется производной этой функции.

Обозначение: у**′ -** читается « игрек штрих»

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если s(t) — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t: v=s′(t).

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x=a можно провести касательную, не параллельную оси y, то f′(a) выражает угловой коэффициент касательной: k=f′(a).

Алгоритм нахождения производной для функции y=f(x)

1. Зафиксировать значение x , найти f(x) .

2. Дать аргументу x приращение Δx , перейти в новую точку x+Δx , найти f(x+Δx) .

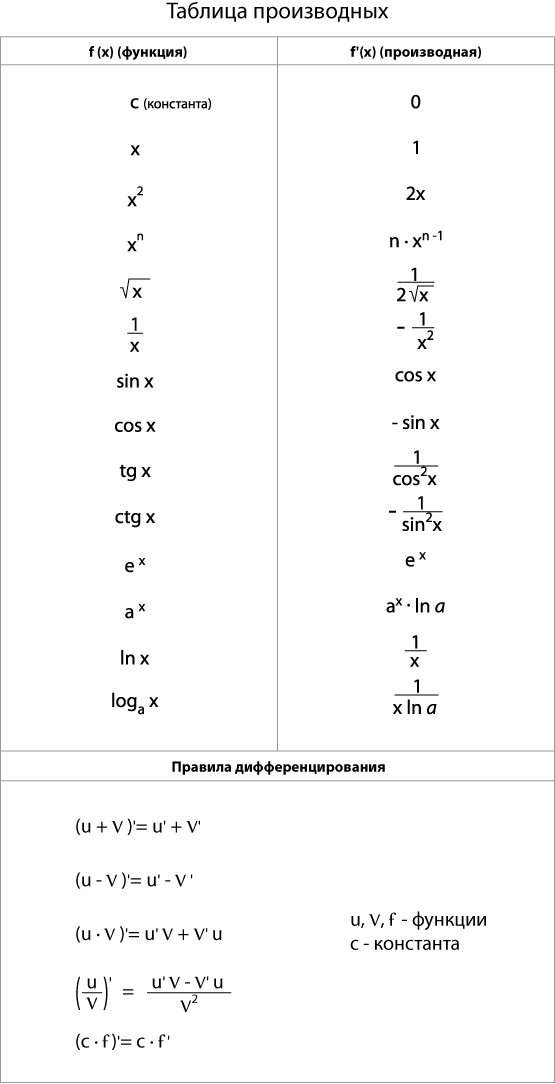
3. Найти приращение функции: Δy=f(x+Δx)−f(x) .

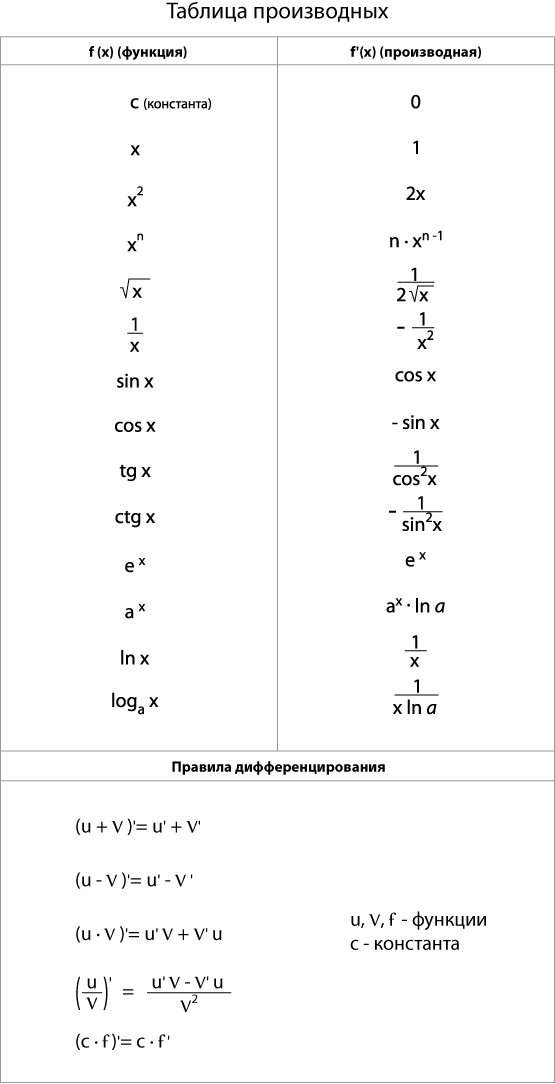
4. Составить отношение .

5. Вычислить limΔx→0ΔyΔx . Этот предел и есть f′(x) .

Этот алгоритм позволяет найти производную функции с «простой формулой».

Существует таблица для нахождения производной элементарных функций





**Примеры применения таблицы и правил.**

**Найти производную функций:**

**а) y=x4+3x2+sinx**  
Решение:  
Воспользуемся первым правилом - производная суммы равна сумме производных, так же воспользуемся и пятым – постоянное число выносится за знак производной - свойством:  
y'=(x4+3x2+sinx)'=(x4 )'+(3x4 )'+(sinx)'=4x3+3·2x+cosx=4x3+6x+cosx

Ответ: y'=4x3+6x+cos(x)

**б) y=cosx · (x5+1)**

Решение:

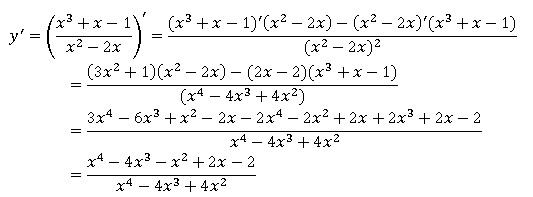
Воспользуемся третьим правилом:

y'=(cosx· (x5+1))'=cos' x · (x5+1)+cosx · (x5+1)'= − sinx · (x5+1)+cosx · (5x4 )= − x5 · sinx − sinx + 5x4 · cosx

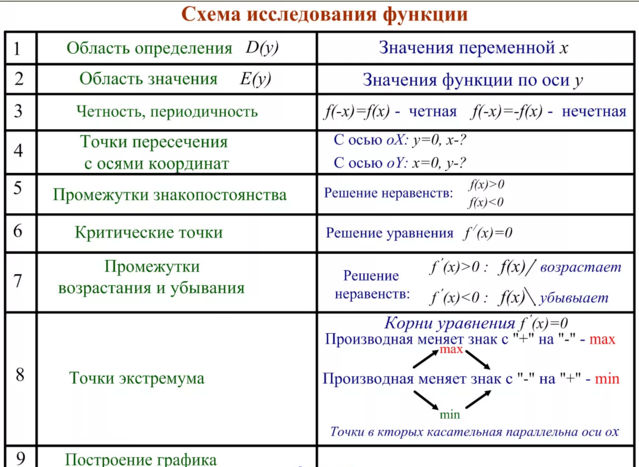
Ответ: y'= − x5 sinx − sinx + 5x4 cosx

**в)**

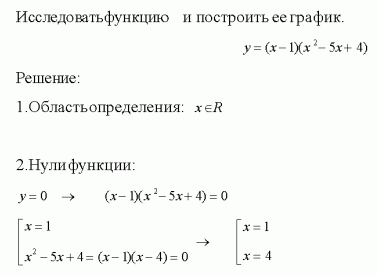
Вычисление производной  
Решение:  
Воспользуемся четвертым правилом:



Производная функции необходима при исследовании функции и построении графика.



Пример.

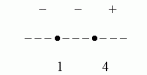


Область значений: (−∞; +∞)

1. Проверим на четность: у(-х) = (−х−1) ((−х)2 − 5(−х) +4) = −(х+1)(х2 +5х +4)

Выражение не равно у(х) и −у(х), следовательно функция не является четной и нечетной.

1. Промежутки знакопостоянства



y>0 при х∈(4; +∞)

у<0 при х∈(−∞;1)∪(1;4)

1. Найдем производную функции

Преобразуем функцию, раскрыв скобки





y'=0 при х=1, х=3

1. Возрастание, убывание и экстремумы – лучше оформить таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Dy | (−∞;1) | 1 | (1;3) | 3 | (3; +∞) |
| y' | + | 0 | − | 0 | + |
| y | возрастает | 0 | убывает | −4 | возрастает |
|  |  | точка максимума |  | точка минимума |  |

1. График

**ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Уравнения, содержащие неизвестную под знаком радикала (корня) называются **иррациональными уравнениями**.

http://www.math.md/school/praktikum/iratr/irate0x.gifНапример:

СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть 2n – четная степень корня, тогда 2n+1 – нечетная степень корня

**Схема 1.** Уравнение вида: , *где с- любое число*

- если с < 0, то уравнение не имеет корней!

- если с ≥ 0, тогда возводим обе части уравнения в степень корня 2n, в левой части исчезает корень и уравнение приобретает вид: , которое решается известными методами.

Пример.

Число с=2>0, возводим обе части в 4 степень: =16

+34−16=0

+18=0

x1 = 3, x2 = 6

**Ответ: x1 = 3, x2 = 6**

**Схема 2.** Уравнение вида: , *где с- любое число*

Уравнение имеет решение при любом числе с. Возводим обе части в степень корня, и получаем уравнение вида:

Пример.

Возводим обе части в 3 степень: = −8

5x = −8−7

5x = −15

x = − 3

**Ответ: x = − 3**

**Схема 3.** Уравнение вида:

Уравнение равносильно системе:

http://free.megacampus.ru/xbookM0001/files/f-teor-16-006.gifПример.

**Здесь: f(x) = g(x) = 4x − 8, корень 2-ой степени.**

Составляем систему: ⇒⇒

Решаем квадратное уравнение

D=682 - 4\*15\*69 = 484 (222)

x1= 3, x2 =

Второй корень не удовлетворяет условию **,** является посторонним.

**Ответ: x = 3**

**Схема 4.** Уравнение вида:

Возводим обе части уравнения в степень корня (нечетную):

Пример.

Корень 3-ей степени – нечетной. Избавляемся от корня – возводим обе части в 3 степень

2x (x − 2) = 0

x1 = 0, x2 = 2

**Ответ: x1 = 0, x2 = 2**

**Схема 5.** Уравнение вида:

Уравнение равносильно системе: или .

**Из двух систем выбирают ту, которая решается проще.**

Пример. http://d3dxadmpi0hxcu.cloudfront.net/goods/ymk/algebra/work2/recomend/3/26.gif

Составляем систему: ⇒ ⇒

Удовлетворяет только корень x = 1, второй корень является посторонним.

**Ответ: х = 1.**

**Схема 6** Уравнение вида:

Возводим в степень корня обе части: =

Пример.

2*x* = − 14

*x* = − 7

**ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

При решении показательных уравнений пользуются следующим свойством показательной функции: если а > 0 и а 1, то равенство ах1 = ах2 справедливо тогда и только тогда, когда х1 = х2.

Примеры с решениями.

1. Проверить, является ли число 3 корнем уравнения = х+1.

Решение. Подставив в уравнение значение х = 3, получим = 3+1, = 4, 4=4 - верное равенство; значит, х = 3 является корнем данного уравнения.

2. Решить уравнение 72х+ 1 = 49.

Решение. Запишем уравнение в виде 72х+1 = 72, откуда 2х+ 1 = 2, 2х = 1, х = 0,5.

3. Решить уравнение 27 ⋅ 9х = 1.

Решение. Так как 27 = 33, 9х = (32)х = 32х, 1 = 3°, то уравнение можно записать в виде 33 + 2х = 3°, откуда 3+2х=0, 2х = -3, х=-1,5.

4. Решить уравнение 52х = 13х.

Решение. Так как 52х = (52)х = 25х, то уравнение можно записать в виде =1, откуда .

5. Решить уравнение 2х + 2 - 2х + 2х + 1 = 20.

Решение. В левой части вынести 2х за скобки: 2х·( 22-1+2)=20, 2х·5=20, 2х=4, х=2.

Ответ: х = 2.

6. Решить уравнение 9х - 26 · 3х - 27 = 0.

Решение. Так как 9х = 32х, то уравнение можно записать в виде 32х - 26 · 3х - 27 = 0. С помощью замены 3х = у (тогда 32x = у2) уравнение сводится к квадратному уравнению у2 — 26у -27 = 0, корнями которого являются у1 = 27, у2 = -l. Уравнение 3х = 27 имеет корень х = 3. Уравнение 3х = -1 не имеет корней (показательная функция принимает только положительные значения).

Ответ: х = 3.

**ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ**

1 Логарифм числа

Логарифмом положительного числа b по основанию a (обозначение logab), где а > 0, а ≠ 1, называют показатель степени, в которую нужно возвести число а, чтобы получить число b.

Равенство

,

где b > 0, а > 0, а ≠ 1, называют основным логарифмическим тождеством.

х = logab − корень уравнения ах = b, где а > 0, а ≠ 1, b > 0.

Примеры с решениями.

Найти: а) ; б) ; в) .

Решение. а) По определению логарифма (согласно основному логарифмическому тождеству) = 5.

б) = .

в) .

2. Свойства логарифмов

Если *а* > 0, *a* ≠ 1, *b* > 0, *c* > 0, *n* – любое действительное число, то:

|  |
| --- |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/ad79354f73.jpg |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/a962423e5f.jpg |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/73e9b67f7d.jpg |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/42ee9ba152.jpg |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/23b9af8ed5.jpg |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/bdc5e37320.jpg |

Примеры с решениями.

1. Вычислить:

а) log945 + log91,8; б) log11 ;

в) 21og0,33 − log0,310000.

Решение.

а) log945 + log91,8 = log9(45·1,8) = log981 = 2;

б) log11 =

в) 21og0,33 − log0,310000=

=.

2. Зная, что log5a = 4, log5fc = 7, найти:

a) ; б) .

Решение.

* + 1. ==

б) =

=.

Вместо log10b пишут lg b (читается «десятичный логарифм числа b»).

Вместо logeb пишут ln b (читается «натуральный логарифм числа b»).

3. Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений справедливо утверждение:

Если *а*>0, *a*≠1, x1>0, x2>0, то равенство справедливо тогда и только тогда, когда х1=х2.

Примеры с решениями.

1. Решить уравнение:

Решение.

По свойству логарифмов заменим сумму на логарифм произведения: . Представим 1 как , получим , тогда (х+4)·х=5, х2+4х-5=0, х1=1, х2=5.

Проверка. 1) х=1: , т.е. является корнем уравнения.

1. х=-5: – получаем недопустимые числа, логарифм от которых не существует, т.о. не является корнем.

Логарифмическая функция, её свойства и график

**Логарифмическая функция** — это функция вида y = logax, где а — заданное число, а > 0, а 1.

Свойства логарифмической функции

1. Область определения — множество всех положительных чисел (х > 0), .

2. Множество значений — множество всех действительных чисел (у ∈ R), ..

3. График функции проходит через точку (1; 0).

4. Функция является возрастающей при а > 1(рис. 8) и убывающей при 0 < a < 1 (рис. 9).

5. Функция принимает положительные значения (у > 0):

при х > 1 (рис. 1) или при 0 < х < 1 (рис. 2).

6. Функция принимает отрицательные значения (у < 0):

при 0 < х < 1 (рис. 1) или при х > 1 (рис. 2).

Рисунок 1 Рисунок 2

Примеры с решениями

1 Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

а) у = log2,7х; б) у = log0,7 х.

Решение. а) Так как 2,7 > 1, то (по свойству 4) функция y = log2,7х возрастающая.

б) Так как 0 < 0,7 < 1, то (согласно свойству 4) функция у = log0,7х убывающая.

2. Изобразить схематически график функции у = log5 х.

Решение. При схематическом построении графика функции y=log5x (рис. 3) учитываем, что:

1. функция определена при х > 0;
2. график функции проходит через точку (1; 0);
3. функция возрастающая, поскольку основание логарифма 5 > 1.

Рисунок 3.

Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений справедливо утверждение:

Если *а*>0, *a*≠1, x1>0, x2>0, то равенство справедливо тогда и только тогда, когда х1=х2.

Примеры с решениями.

1. Решить уравнение:

Решение.

По свойству логарифмов заменим сумму на логарифм произведения: . Представим 1 как , получим , тогда (х+4)·х=5, х2+4х-5=0, х1=1, х2=5.

Проверка. 1) х=1: , т.е. является корнем уравнения.

1. х=-5: – получаем недопустимые числа, логарифм от которых не существует, т.о. не является корнем.