Министерство образования и науки Российской Федерации

Международный образовательный консорциум «Открытое образование»

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

АНО «Евразийский открытый институт»

В.В. Громенко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Для студентов специальности

«Прикладная информатика»

Учебно-практическое пособие

Руководство по изучению дисциплины

Учебная программа по дисциплине

Москва 2004

УДК 519.86
ББК 22.1
Г 871

Громенко В.В. **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА:** Учебно-практическое пособие, руководство по изучению дисциплины, учебная программа по дисциплине / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. – М.: МЭСИ, 2004. – 100 с.

Учебно-практическое пособие «Математическая экономика» для студентов специальности «Прикладная информатика» (060700).

В предлагаемом пособии дается представление об основных принципах использования математического моделирования в проблемах рационального хозяйствования, а также о наиболее перспективных экономико-математических моделях и постановках задач.

Ответственный редактор заведующий кафедрой исследования операций, кандидат технических наук, профессор Мастяева И.Н.

ISBN 5-7764-0380-4

Содержание

Учебно-практическое пособие

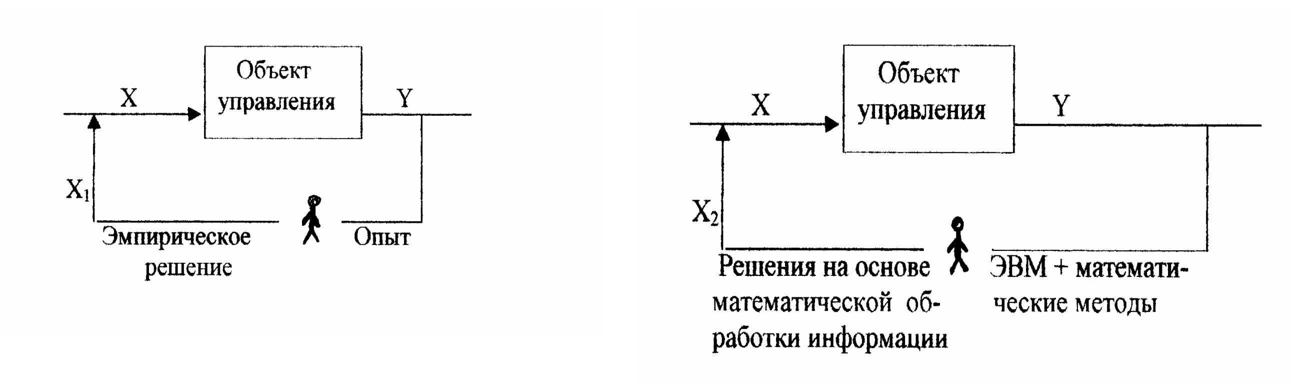
Список сокращений и аббревиатур

ВВ – валовой выпуск.
ВВП – валовой внутренний продукт.
КП – конечный продукт.
МОБ – межотраслевой баланс.
МПФ – мультипликативная производственная функция.
НД – национальный доход.
ОПФ – основные производственные фонды.
ПП – промежуточный продукт.
ПФ – производственная функция.
ЭММ – экономико-математическая модель.
$\boldsymbol{A = \{a_{ij}\}_{mxn}}$ – матрица прямых затрат.
$\boldsymbol{A^T}$ – матрица транспонированная для А.
$\boldsymbol{C}$ – реальный объем потребления (непроизводственное потребление).
$\boldsymbol{E}$ – эффективность производства.
$\boldsymbol{I}$ – реальный объем инвестиций.
$\boldsymbol{K}$ – накопленный труд в форме основных фондов (капитал).
$\boldsymbol{L}$ – количество рабочей силы (рабочего времени, число работающих).
$\boldsymbol{M}$ – масштаб производства.
$\boldsymbol{N}$ – национальный доход.
$\boldsymbol{X}$ – валовой выпуск.
$\boldsymbol{Y}$ – валовой внутренний продукт (конечный продукт).
c – потребление на одного работающего.
i – инвестиции на одного работающего.
k – фондовооруженность.
$l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ – вектор затрат трудовых ресурсов.
$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли.
x – производительность труда.
λ – темп роста трудовых ресурсов.
μ – коэффициент выбытия основных производственных фондов.
ρ – доля валовых капиталовложений в конечный продукт.

Введение

Необходимость применения математики в управлении экономикой определяется двумя главными причинами: первая – современная экономическая практика очень усложнилась, и человек не может управлять им наилучшим образом без использования математических методов; вторая – изменилась методология, принципы управления народным хозяйством.

Применение математики меняет процесс управления (рис. 1). При традиционном пути процесс управления осуществляется по принципу: «от опыта – к эмпирическому решению» (рис. 1а).



а) б)

Рис. 1

Существо решения определяется человеком, который перерабатывая в уме или на простейших счетных устройствах информацию (Y) и воздействуя на объект управления, задает параметры управления.

Использование математических методов возможно только при наличии ЭВМ, на которой и рассчитывается решение, а человек анализирует его и при необходимости корректирует. При этом управляющее воздействие (X_2) в общем случае отличается от (X_1). Решение уже формулируется по принципу: «от информации – к обоснованному решению» (рис. 1б).

Почему же традиционные методы не дают оптимальных решений? В числе главных следующие причины:

1) неполнота информации. Хозяйственники часто не замечают недостатка информации и принимают не наилучшие решения, так как большая доля информации имеет вероятностный или неопределенный характер. Вместо одного варианта хозяйственного решения стало возможным оценить несколько вариантов.

2) многие задачи столь сложны, что человек не может решить их оптимальным образом и вместо глобального находит локальный оптимум;

3) недостаточная квалификация, отсутствие опыта часто приводят к принципиальной невозможности решения задачи наилучшим путем;

4) обилие информации приводит к невозможности полного ее восприятия.

Цикл принятия управленческого решения на основе математических методов показан на рис. 2.

На этапе 0-1 происходит выбор математических методов, алгоритмизация задач, выбор критерия оптимальности и пр. Этот процесс завершается созданием математической модели, а затем алгоритма и программы расчетов.

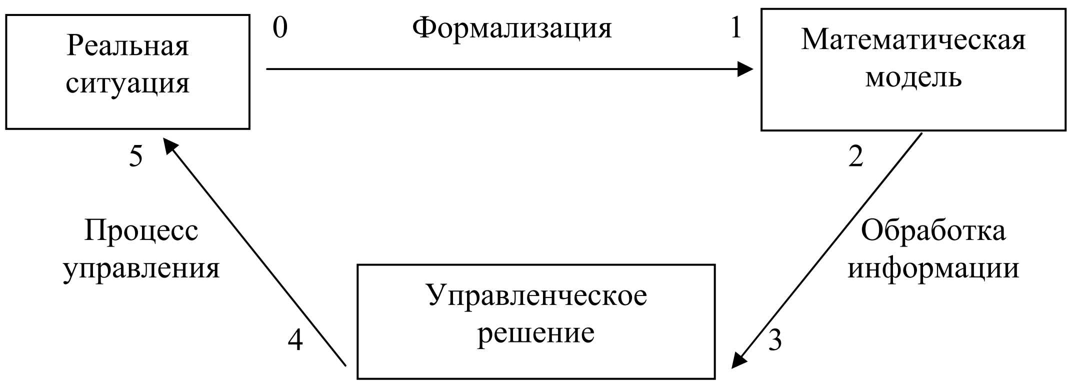


Рис. 2

Процесс 2-3 заключается в переработке информации на ЭВМ и заканчивается формированием управленческого решения, причем в этом процессе участвует и человек. Процесс 4-5 – это воздействие на объект управления на основе организационных и технических систем и средств управления.

В экономике существуют следующие взаимосвязанные системы управления: организационная – воздействие человека, причем осуществляется управление человеком и коллективами людей, технологические – с использованием средств диспетчерского и автоматического управления. Решение, вырабатываемое на этапе 4-5, всегда должно учитывать средства и системы управления, которые позволяют его реализовать.

В процессе выбора решения у хозяйственника и у исследователя возникают следующие вопросы. Просмотрены ли все варианты решений? Какие соображения положены в основу оценки последствий возможных вариантов решения? Как сформулировать показатели, характеризующие эффективность системы? Как выбрать наиболее подходящее решение?

Для того чтобы ответить на эти вопросы, анализируемую проблему необходимо описать точно. Языком, наиболее подходящим для этого, является язык математики. Описание изучаемой системы на языке математики – это и есть её математическая модель. Кроме средств описания, математика предоставляет средства анализа модели.

Модель выражает взаимосвязь между управляемыми, неуправляемыми переменными и показателями эффективности. Существует несколько различных типов соотношений, формирующих модель.

1. Аналитические выражения физических законов или общепринятых правил учета хозяйственной деятельности: $i_t = i_{t\text{-}1} + x_t - d_t$, запасы(t) = запасы ($t$-1) + производство($t$) – сбыт ($t$).

2. Эмпирические соотношения. Они выводятся на основе изучения данных за прошлый период, например, зависимость между стоимостью сырья (С) и стоимостью реализуемой продукции ($С_п$): $С = 0{,}4С_п \pm \varepsilon$. Для определения числовых значений параметров эмпирического соотношения необходим статистический анализ соответствующих данных.

3. Соотношения нормативного характера. Это соотношения-требования, которые предъявляются к качеству функционирования системы (например, требование, чтобы запасы продукции не превышали пятидневного объема опроса). Во многих случаях нормативные соотношения определяются на основе теоретического описания системы.

4. Соотношения, выражаемые бинарным отношением предпочтения на области допустимых значений.

Существует три типа моделей: *полная, упрощенная*, *имитационная*.

Полная математическая модель содержит 5 групп уравнений:

1. Уравнения эффективности (критерий управления, целевая функция) служат основой для оценки конкретных решений рассматриваемой проблемы. В большинстве случаев используется несколько уравнений эффективности.

2. Уравнения связи. Зависимость выходных параметров от входных (управляемых и неуправляемых) переменных системы. Если зависимости не меняются с течением времени, объект считается стационарным. В большинстве систем эти зависимости меняются. Для них выделяют интервалы такой длины, на которой объект может считаться стационарным. Учет нестационарности системы усложняет математическую модель.

3. Уравнения ограничений. Показывают допустимые пределы изменения входных и выходных переменных системы. Могут быть записаны в форме равенств (ограничения типа баланса) или неравенств (ограничения на пределы изменения переменных). В качестве ограничений в организационных системах могут быть не технологические ограничения, а директивные указания (например, план работы), социально-трудовые ограничения – ограничения продолжительности смены, условий труда и др.

4. Уравнения адаптации. Выражают основанное на учете ранее встретившихся удачных вариантов поведения системы, стремление воссоздать удачные варианты в похожих условиях или хотя бы минимизировать расхождение между ними.

5. Уравнения управления. Определяют оптимальный закон (алгоритм) управления. В общем случае они показывают зависимость оптимальных управляемых параметров от выхода системы, цели управления и от неуправляемых параметров. Поиск закона управления является конечным этапом оптимизации поведения системы.

У*прощенная модель*. Всегда в рамках анализа исследователь должен дать исчерпывающую формулировку задачи, если даже очевидно, что в такой постановке она не поддается решению. Обеспечив полную формулировку, можно затем принять ряд допущений, упрощающих модель. Необходимость полной модели обусловлена следующими факторами:

1) при полной формулировке проблемы исследователь будет уверен в том, что он правильно понимает существо и детали данной проблемы;

2) исследователь лучше представит себе, как будет влиять любое из необходимых упрощений на адекватность модели.

Имитационная модель (оценочная модель) содержит соотношения связи и ограничения в включает подсчет (но не оптимизацию) целевой функции.

Одновременно с построением модели необходимо выбрать или разработать численный метод решения. Для этого нужно решить:

1) использовать имитационное моделирование или метод оптимизации;

2) учитывать случайности или нет;

3) учитывать нелинейность некоторых соотношений или достаточно ограничиться их линейной аппроксимацией;

4) использовать существующие методы решения или разработать новый.

На основе высокого уровня развития экономической науки, глубокого понимания закономерностей функционирования экономики и умения практически использовать это понимание в ЭММ можно значительно усовершенствовать систему управления народным хозяйством.

Тема 1. Производственные функции (ПФ)

1.1. Понятие ПФ. Двухфакторная ПФ. Мультипликативная ПФ. ПФ Кобба-Дугласа. Средние и предельные (маржинальные) значения ПФ

ПФ – зависимость между количеством используемых в производстве ресурсов (факторов производства) и объемом выпускаемой продукции.

ПФ применяются для анализа влияния различных сочетаний факторов на объем выпуска в определенный момент времени (статический вариант) и для анализа, а также прогнозирования соотношения объемов факторов и объемов выпуска в разные моменты времени (динамический вариант) на микро- и макроуровнях – от фирмы до народного хозяйства в целом (агрегированная ПФ функция, в которой выпуском служит – валовой выпуск X (ВВ) (либо валовой внутренний продукт Y (ВВП), либо национальный доход N (НД))). В отдельной фирме ПФ описывает объем выпуска продукции, которую они в состоянии произвести при каждом сочетании используемых факторов производства.

В качестве ресурсов (факторов производства) наиболее часто рассматриваются накопленный труд в форме производственных фондов K (капитал) и настоящий (живой) труд L и экономика замещается своей моделью в форме двухфакторной нелинейной ПФ

$$X = F(K,L), \tag{1.1}$$

т.е. выпуск (продукции) есть функция от затрат ресурсов (фондов и труда).

Вместо общего представления ПФ в виде (1.1) часто используют два частных случая:

1) Мультипликативная ПФ (МПФ) выпуска

$$X = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \tag{1.2}$$

2) ПФ Кобба-Дугласа

$$x = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},\ \text{где}\ \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = 1-\alpha. \tag{1.3}$$

Величина $\dfrac{X}{L}$ называется средней производительностью труда, а величина $\dfrac{X}{K}$ средней производительностью ОПФ (средней фондоотдачей).

Частные производные выпуска по факторам называются предельными продуктами или предельными (маржинальными) эффективностями факторов, и характеризуют прирост выпуска на единицу прироста фактора:

$\dfrac{\partial F}{\partial K}$ – предельная фондоотдача (предельная эффективность фондов),

$\dfrac{\partial F}{\partial L}$ – предельная производительность труда (предельная эффективность труда).

Для МПФ (1.2) предельная производительность труда пропорциональна с коэффициентом α_2 средней производительности труда $\dfrac{X}{L}$, а предельная фондоотдача – средней фондоотдаче $\dfrac{X}{K}$ с коэффициентом α_1

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 AK^{\alpha_1-1}L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 X}{K}, \qquad \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_2 AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2-1} = \frac{\alpha_2 X}{L}, \tag{1.4}$$

1.2. Неоклассическая ПФ. Условия, которым должна отвечать неоклассическая ПФ и их экономическая интерпретация

ПФ (1.1) называется *неоклассической,* если она задана при всех неотрицательных значениях K и L и является непрерывной и нужное число раз дифференцируемой функцией своих аргументов и удовлетворяет следующим условиям, имеющим под собой экономическое обоснование.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0. \tag{1.5}$$

Это означает, что каждый из ресурсов необходим хотя бы в малых количествах. Заметим, что это условие выполняется для функции (1.2) и (1.3).

2. При увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет. В математической форме, если ПФ дифференцируема это имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0,. \tag{1.6}$$

Так как $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, то согласно (1.6) МПФ обладает свойством 2, адекватным реальной экономике: с ростом затрат ресурсов выпуск растет.

3. По мере увеличения количества одного ресурса при постоянных количествах других скорость роста выпуска замедляется. Математически это требование для дважды дифференцируемых ПФ (1.1) выглядит так:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \tag{1.7}$$

Легко проверить, что для ПФ (1.2) это условие выполняется.

Часто вместо (1.7) формулируется более сильное математическое требование: $F(K,L)$ – вогнутая функция, т. е. для любых двух неотрицательных точек (K_1, L_1) и (K_2, L_2) и любого числа $\lambda\in[0, 1]$ справедливо неравенство

$$F(\lambda(K_1, L_1) + (1-\lambda)(K_2, L_2)) \geq \lambda F(K_1, L_1) + (1-\lambda)F(K_2, L_2). \tag{1.8}$$

Если функция $F(K, L)$ дважды непрерывно дифференцируема, условие вогнутости эквивалентно требованию неположительной определенности матрицы вторых производных функции $F(K, L)$ при всех положительных значениях вектора ресурсов (K, L), т. е.

$$(\bar{x}, H\bar{x}) = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}xy + \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}y^2 \leq 0 \tag{1.9}$$

для всех векторов (x, y), где H матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} & \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Матрица H называется матрицей Гессе (или гессианом).

4. При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет:

$$F(+\infty, L) = F(K, +\infty) = +\infty. \tag{1.11}$$

Из (1.2) также видно, что МПФ обладает свойством 4. Следовательно, ПФ (1.2) при $0< \alpha_1< 1$, $0< \alpha_2< 1$ является неоклассической.

1.3. Эластичность. Экономическая интерпретация параметров МПФ. Норма замещения производственных факторов

Введем понятие эластичности как логарифмической производной факторов

$$\alpha_K = \frac{d\ln X}{d\ln K} = \lim_{\substack{\Delta X\to 0\\ \Delta K\to 0}} \frac{(\Delta X/X)}{(\Delta K/K)}, \qquad \alpha_L = \frac{d\ln X}{d\ln L} = \lim_{\substack{\Delta X\to 0\\ \Delta L\to 0}} \frac{(\Delta X/X)}{(\Delta L/L)} \tag{1.12}$$

Для мультипликативной ПФ $ln\, X = ln\, A + \alpha_1\, ln\, K + \alpha_2\, ln\, L$ и

$$\alpha_K = \frac{d\, ln\, X}{d\, ln\, K} = \alpha_1,\ \alpha_L = \frac{d\, ln\, X}{d\, ln\, L} = \alpha_2\,. \tag{1.13}$$

т.е. α_1 – эластичность выпуска по ОПФ, α_2 – эластичность выпуска по труду. Из (1.12) видно, что коэффициент эластичности фактора показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если фактор увеличится на 1%.

В качестве примера приведем МПФ ВВ РФ (млрд. руб.) в зависимости от стоимости ОПФ (млрд. руб.) и числа занятых в народном хозяйстве (млн.чел.) по данным РФ за 1960-1994 г.г. в ценах для этого периода

$$X = 0{,}931 K^{0{,}539} L^{0{,}594}\,. \tag{1.14}$$

При увеличении ОПФ на 1%, ВВ увеличится на 0,539%, а при увеличении занятых на 1% – на 0,594%.

Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то имеет место трудосберегающий (интенсивный) рост, в противном случае фондосберегающий (экстенсивный) рост.

Параметр А интерпретируется как параметр технического прогресса: при тех же α_1, α_2 выпуск в точке (K, L) больше, чем больше А.

1.4. ПФ в темповой записи

Рассмотрим темп роста выпуска

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_{1_1}} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}, \tag{1.15}$$

возведем обе части (1.15) в степень $\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)}$, то получим соотношение

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}, \tag{1.16}$$

При $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, выпуск растет быстрее, чем в среднем растут факторы, а при $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ – медленнее. В самом деле, пусть факторы растут (т.е. $K_{t+1} > K_t$, $L_{t+1} > L_t$), тогда согласно (1.15) и выпуск растет (т.е. $X_{t+1} > X_t$), то при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$.

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right) > \left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

т.е. действительно, темп роста выпуска больше среднего темпа роста факторов. При $\alpha_1+\alpha_2>1$ ПФ описывает растущую экономику.

1.5. Изокванты, изоклинали и их свойства. Предельная норма замещения труда фондами и фондов трудом

Возможность взаимного замещения ресурсов означает, что одно и то же количество продукта X может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов. Совокупность таких сочетаний ресурсов, называется *изоквантой* и обозначается

$$Q(X_0) = \{(K, L): F(K, L) = X_0\}. \quad (1.17)$$

Для мультипликативной ПФ изокванта имеет вид

$$AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} = X_0 = const, \text{ или } K^{\alpha_1} = \left(\frac{X_0}{A}\right)L^{-\alpha_2}. \quad (1.18)$$

Очевидные выводы о свойствах изокванты:

1) изокванты не пересекаются друг с другом;

2) изокванта $Q(X_0)$ разбивает неотрицательный ортант пространства ресурсов на два множества, в одном из которых $X < X_0$, в другом $X > X_0$, причем граница между этими множествами проходит по изокванте $Q(X_0)$;

3) большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат.

4) изокванты не имеют общих точек с осями координат.

Для разных K, L, лежащих на конкретной изокванте выпуск равен одному и тому же значению X_0: $F(K,L) = X_0 = const$. Тогда

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)dK + \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)dL = 0. \quad (1.19)$$

В этом соотношении $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$, поэтому dK и dL имеют разные знаки: если труд убывает $dL<0$, то $dK>0$, т.е. выбывший в объеме $|dL|$ труд замещается фондами в объеме dK. Из (1.19) следует, что вдоль изокванты

$$S_K = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}, \quad S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} \quad (1.20)$$

Величину S_K принято называть предельной нормой замещения труда фондами. Она показывает, сколько труда может быть высвобождено при увеличении затрат фондов, при постоянном выпуске.

Аналогично величину S_L принято называть предельной нормой замещения фондов трудом. Она показывает, сколько фондов может быть высвобождено при увеличении затрат труда, при постоянном выпуске.

Для мультипликативной ПФ норма замещения труда фондами пропорциональна фондовооруженности

$$S_K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{K}{L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}k\,, \tag{1.21}$$

недостаток труда можно компенсировать увеличением фондовооруженности.

Линии наибольшего роста ПФ называют *изоклиналями* ПФ. Изоклинали ортогональны изоквантам. Так как направление наибольшего роста в каждой точке (K, L) задается градиентом $gradF = \left(\frac{dF}{dK}, \frac{dF}{dL}\right)$, то уравнение изоклинали записывается в форме $\frac{dK}{(\partial F/\partial K)} = \frac{dL}{(\partial F/\partial L)}$. Для мультипликативной ПФ (1.2) $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1\frac{X}{K}$, $\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2\frac{X}{L}$, поэтому изоклиналь задается дифференциальным уравнением $\frac{1}{\alpha_1}KdK = \frac{1}{\alpha_2}LdL$. Его решение

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}L^2 + a}, \quad a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}L_0^2, \tag{1.22}$$

где (L_0, K_0) – координаты точки, через которую проходит изоклиналь. Наиболее простая изоклиналь при $a = 0$ представляет собой прямую.

$$K = L\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\,. \tag{1.23}$$

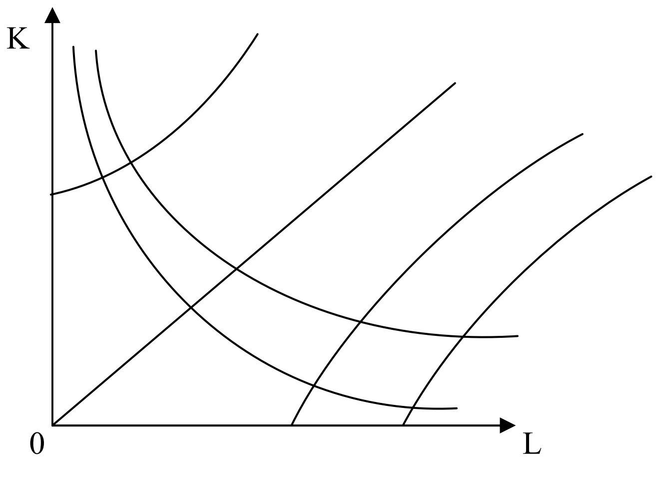


Рис. 1.1. Изокванты и изоклинали

1.6. Оценка с помощью ПФ масштаба и эффективности производства

При изучении факторов роста экономики выделяют экстенсивные факторы роста (за счет увеличения затрат ресурсов) и интенсивные факторы роста (за счет повышения эффективности использования ресурсов).

Возникает вопрос: как с помощью ПФ выразить *масштаб и эффективность* производства? Этот вопрос поддается сравнительно простому разрешению, если выпуск и затраты выражены в соизмеримых единицах, например, представлены в соизмеримой стоимостной форме. Однако проблема соизмерения настоящего и прошлого труда до сих пор не решена полностью удовлетворительным образом. Поэтому воспользуемся переходом к относительным (безразмерным) показателям.

В относительных показателях МПФ имеет вид:

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2}, \qquad (1.24)$$

где X_0, K_0, L_0 – значения выпуска и затрат в базовый год.

Безразмерная форма (1.24) легко приводится к первоначальному виду $X = \dfrac{X_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}} K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$. Таким образом, коэффициент $A = \dfrac{X_0}{K_0 L_0}$ получает естественную интерпретацию – это коэффициент, который соизмеряет ресурсы с выпуском.

Если обозначить выпуск и ресурсы в относительных (безразмерных) единицах измерения через $\widetilde{X}, \widetilde{K}, \widetilde{L}$, то ПФ в форме (1.12) запишется так

$$\widetilde{X} = \widetilde{K}^{\alpha_1} \widetilde{L}^{\alpha_2}. \qquad (1.25)$$

Эффективность экономики – это отношение результата к затратам. Мы имеем два вида затрат: затраты прошлого труда в виде фондов K и труда L. Имеются два частных показателя эффективности: $\dfrac{X}{K}$ – фондоотдача, $\dfrac{X}{L}$ – производительность труда. Поскольку частные показатели эффективности имеют одинаковую размерность (безразмерны), то можно находить любые средние из них. Так как ПФ в мультипликативной форме, то и среднее естественно взять в такой же форме, т.е. в форме среднегеометрического

$$E = \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \qquad (1.26)$$

где роль весов играют величины $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2)}$, $1 - \alpha = \dfrac{\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)}$. Из (1.26) вытекает, что с помощью коэффициента экономической эффективности ПФ преобразуется в форму, внешне совпадающую с функцией Кобба-Дугласа

$$\widetilde{X} = E \widetilde{K}^{\alpha} \widetilde{L}^{1-\alpha}, \qquad (1.27)$$

но в соотношении (1.27) Е – не постоянный коэффициент, а функция от (K ,L).

Масштаб производства М проявляется в объеме затраченных ресурсов, то средний размер использованных ресурсов (масштаб производства) равен

$$M = \widetilde{K}^{\alpha} \widetilde{L}^{1-\alpha}. \qquad (1.28)$$

Из (1.27) и (1.28) вытекает, что

$$\widetilde{X} = EM\ . \tag{1.29}$$

Для функции ВВ экономики РФ за 1960-1994 гг. (1.14)

$$X = 0{,}931K^{0{,}539}L^{0{,}594},\quad \alpha_K = 0{,}539,\quad \alpha_L = 0{,}594.$$

С 1960 г. по 1988 г. ВВ возрос в 4,08 раза. Выясним, какая часть этого роста была обеспечена ростом масштаба производства и какая часть повышением его эффективности. За этот период стоимость ОПФ возросла в 6,62 раза, а число занятых увеличилось в 1,79 раза, поэтому частные эффективности ресурсов, рассчитанные по темпам роста выпуска и ресурсов, равны

$$E_K = \frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}} = \frac{4{,}08}{6{,}62} = 0{,}616;\quad E_L = \frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}} = \frac{4{,}08}{1{,}79} = 2{,}279. \tag{1.30}$$

Эффективность экономики $E = \sqrt[\alpha_K+\alpha_L]{E_K^{\alpha_K} E_L^{\alpha_L}} = 1{,}21$,

масштаб $M = \sqrt[\alpha_K+\alpha_L]{K^{\alpha_K} L^{\alpha_L}} = (6{,}62)^{0{,}476} \cdot (1{,}79)^{0{,}524} = 3{,}37$.

Таким образом, общий рост ВВ в 4,08 раз обуславливается ростом эффективности в 1,21 раза и ростом масштаба 3,37 раза.

Принято говорить, что скалярная функция является однородной функцией степени ν, если для любого вектора (K, L) и любого скаляра λ

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\nu} F(K, L). \tag{1.31}$$

Если $\nu > 1$, то ПФ характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства; если $\nu = 1$ – постоянной отдачей, а при $\nu < 1$ – убывающей отдачей. Для ПФ с постоянной отдачей от расширения масштабов производства при $L > 0$ имеем $X = L\, F(K/L, 1)$, т.е. $X/L = F(K/L, 1)$. Благодаря этому количество переменных ПФ уменьшается на единицу. В случае двух ресурсов, если ввести обозначение $x = X/L$, $k=K/L$ (фондовооруженность) и $F(K/L,1) = f(k)$, то вместо ПФ (1.1) получим функцию

$$x = f(k). \tag{1.32}$$

Для функция (1.3) объем продукции на одного трудящегося имеет вид

$$x = Ak^{\alpha}. \tag{1.33}$$

1.7. Основные типы ПФ. Методы построения ПФ

Степенные ПФ были предложены в двадцатых годах нашего столетия К. Коббом и П. Дугласом для описания связи между объемом общественного продукта и двумя важнейшими ресурсами – трудовыми ресурсами и ОПФ (1.3). Обобщением является функция (1.2) и степенная ПФ с *n* ресурсами.

ПФ с постоянной эластичностью замещения ресурсов имеют следующий общий вид:

$$X = A(\alpha_1 K^{-\rho} + \alpha_2 L^{-\rho})^{-\delta/\rho}, \tag{1.34}$$

где параметры A, δ, ρ, α_1, α_2 положительны. Для них, как и для степенных функций, выполняются предположения неоклассической функции.

Для выпуска продукции необходимы все ресурсы. Это показывается предельным переходом в функции (1.34) при $K \to 0$ (или $L \to 0$) при фиксированном L (или K).

Продифференцируем ПФ (1.34), например по K, получим

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\delta \alpha_1 K^{-(1+\rho)}}{\alpha_1 K^{-\rho} + \alpha_2 L^{-\rho}} F(K, L) > 0. \tag{1.35}$$

Можно показать, что предельная эффективность ресурса падает с ростом его объема при постоянных количествах других ресурсов.

Эластичность выпуска, например, по фондам

$$\alpha_K = \frac{d \ln X}{d \ln K} = \frac{(\partial X / X)}{(\partial K / K)} = \frac{\delta \alpha_1 K^{-\rho}}{\alpha_1 K^{-\rho} + \alpha_2 L^{-\rho}}. \tag{1.36}$$

Таким образом, для ПФ (1.34) эластичности выпусков по ресурсам, в отличие от степенных ПФ, уже не постоянны. При фиксированных затратах трудовых ресурсов уменьшение количества фондов приводит к увеличению эластичности выпуска до величины δ, неограниченное увеличение – к падению эластичности выпуска по этому ресурсу до нуля. Поэтому отношение предельной эффективности ресурса к средней эффективности падает с ростом используемого объема ресурса. Эластичность производства согласно (1.36) равна δ, не зависит от соотношения ресурсов, как и в случае степенной ПФ. Экономический смысл параметра δ: отдача от увеличения масштабов производства.

Итак, функция (1.34) неоклассическая.

ПФ с постоянными пропорциями имеют следующий вид:

$$X = A \min (K/K_0, L/L_0), \tag{1.37}$$

где A, K_0, L_0 – положительные параметры.

Если вектор ресурсов удовлетворяет соотношению

$$(K, L) = t(K_0, L_0), \tag{1.38}$$

где t – неотрицательный скаляр, то ресурсы используются рационально, а выпуск продукции определяется соотношением $X = tA$. Всякое отклонение затрат ресурсов от этой структуры приводит к нерациональному использованию части ресурсов. Действительно, пусть структура вектора ресурсов отклоняется от рациональной, т. е. $(K, L) = t(K_0, L_0) + (K_1, L_1)$, где вектор (K_1, L_1) имеет один нулевой элемент (например, $K_1 = 0$). Тогда согласно (1.37) $X = A\min\,(tK_0 / K_0, (tL_0 + L_1)/L_0) = tA$, т.е. выпуск продукции имеет ту же величину, что и при затратах (K_0, L_0). Ресурсы, описываемые вектором (K_1, L_1), были затрачены без какой-либо пользы. Таким образом, здесь замещение недостающего ресурса невозможно не только тогда, когда этот ресурс полностью отсутствует, но и при любых количествах ресурса. Это позволяет ввести понятие лимитирующего ресурса, т. е. такого ресурса, на котором достигается минимум в ПФ (1.34). Увеличение количества лимитирующих ресурсов ведет к увеличению выпуска. Остальные ресурсы являются избыточными – увеличение их количества не приводит к увеличению выпуска; более того, возможно некоторое уменьшение их количества без потери в выпуске продукции. Если выполняется условие (1.38), то все ресурсы являются лимитирующими и избыточных ресурсов нет.

Для ПФ (1.37) выполняется первое предположение неоклассической ПФ. Рассмотрим некоторые другие свойства этой функции. Поскольку функция (1.37) недифференцируема (хотя и непрерывна), то производные выпуска по ресурсам можно рассматривать только в отдельных областях пространства ресурсов. Это делает исследование довольно громоздким, поэтому остановимся на анализе ПФ с двумя ресурсами и $(K_0, L_0) = (1, 1)$.

При $K > L$ имеем $X = AL$, поэтому $\partial X/\partial K = 0$, $\partial X/\partial L = A$. При $K < L$ имеем $\partial X/\partial K = A$, $\partial X/\partial L = 0$. Отсюда следует, что при

$$K > L \;\; \alpha_K = \frac{d\,ln\,X}{d\,ln\,K} = 0\,,\; \alpha_L = \frac{d\,ln\,X}{d\,ln\,L} = 1\text{, а при } K < L \;\; \alpha_K = 1,\; \alpha_L = 0\,.$$

Полученные значения эластичности выпуска по ресурсам имеют следующий смысл: для лимитирующего ресурса предельная и средняя эффективности равны, в противном случае из-за равенства предельной эффективности пулю эластичность выпуска по этому ресурсу равна нулю. Эластичность производства равна единице. Это следует из того, что $\alpha_K + \alpha_L = 1$.

Некоторые другие типы функций выпуска. Кроме рассмотренных функций выпуска встречаются и ПФ, являющиеся обобщением этих функций. Рассмотрение этих ПФ выходит за рамки данного пособия.

1.8. Построение ПФ

Можно выделить два направления исследований в области построения ПФ. Первое состоит в анализе структуры производственной единицы, в построении ее математической модели, которая и должна служить основой для формулировки ПФ. Второе направление состоит в том, что анализируется не структура, а реакция производственной единицы на внешние воздействия. Модели первого типа принято называть структурными, второго типа – функциональными.

В настоящее время наибольшее распространение получили ПФ второго типа. Построение функциональной модели объекта исследования базируется на методе «черного ящика». Его основная идея: вместо описания внутренней структуры изучаемого объекта, следует построить ПФ, например, $X=AK^{\alpha}L^{\beta}$. Параметры функции выбирают так, чтобы она аппроксимировала результаты наблюдений за моделируемым объектом.

При построении ПФ «черным ящиком» считается изучаемая производственная единица, внешними воздействиями (входами системы) являются затраты ресурсов K и L, а реакцией (выходом системы) – произведенная продукция X. Рассмотрит производство, вырабатывающее один продукт. Пусть имеется T наблюдений входов (затрат ресурсов) и соответствующих значений выхода (производства продукции) данной производственной единицы (K_t, L_t, X_t), $t = 1, 2,..., T$, где T – длина временного ряда, при этом предполагается, что имеет место T уравнений

$$X_t = A\,K_t^{\,\alpha} L_t^{\,\beta}.$$

В логарифмах эта функция линейна $ln\,X_t = ln\,A + \alpha\,ln\,K_t + \beta\,ln\,L_t$.

Наиболее распространенный метод оценки параметров lnA, α и β является метод наименьших квадратов – выбор таких значении этих параметров, при которых достигается наименьшее значение функции

$$Q = \sum_{t=1}^{T} (ln\,X_t - (ln\,A + \alpha\,ln\,K_t + \beta\,ln\,L_t))^2\,.$$

Выводы

1. ПФ могут иметь разные области использования. Принцип «затраты-выпуск» может быть реализован как на макро-, так и микроэкономическом уровне.

2. На макроэкономическом уровне затраты и выпуск измеряются, как правило, в стоимостных показателях и представляют собой суммарные величины произведений объемов затрачиваемых (или используемых) ресурсов и выпускаемых продуктов на их цены.

3. На микроэкономическом уровне затраты и выпуск могут измеряться в натуральных и в стоимостных показателях. Затраты труда могут быть измерены в человеко-часах или в рублях выплаченной заработной платы; выпуск продукции может быть представлен в штуках или в других натуральных единицах или в виде своей стоимости.

4. Важнейшим этапом в построении ПФ конкретного экономического объекта является выбор конечнопараметрического класса функций от факторов производства. Ориентиром при этом служат наблюдаемые значения показателей деятельности производственного объекта.

Тренировочные задания

Задание 1.1. Для ПФ Кобба-Дугласа (1.3) найти в явном виде предельную производительность труда и капитала.

Задание 1.2. Рассмотрим ПФ $X = 2.248K^{0.404}L^{0.803}$ и показатели экономики некоторой страны: валовой продукт возрос с 1960 по 1965 г. в 2.82 раза, ОПФ за этот же период увеличились в 2.88 раза, а число занятых – в 1.93 раза. Вычислить по ней масштаб и эффективность производства.

Задание 1.3. Для ПФ Кобба-Дугласа (1.3) найти в явном виде нормы замещения фондов трудовыми ресурсами и трудовых ресурсов фондами.

Тесты

I. Что такое изокванта?

1. Логарифмическая производная факторов

$$\alpha_K = \frac{d\ln X}{d\ln K} = \lim_{\substack{\Delta X \to 0 \\ \Delta K \to 0}} \frac{(\Delta X/X)}{(\Delta K/K)},\ \alpha_L = \frac{d\ln X}{d\ln L} = \lim_{\substack{\Delta X \to 0 \\ \Delta K \to 0}} \frac{(\Delta X/X)}{(\Delta L/L)}.$$

2. Линии наибольшего роста ПФ.

3. Совокупность таких сочетаний ресурсов, при которых может быть произведено определенное количество продукции X_0, т.е. множество

$$Q(X_0) = \{(K, L): F(K, L) = X_0\}.$$

4. Среднегеометрическое частных показателей экономической эффективности

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}.$$

5. Функция $F(K,L)$, для которой для любых двух неотрицательных точек (K_1, L_1) и (K_2, L_2) и любого числа $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$F(\lambda(K_1, L_1) + (1-\lambda)(K_2, L_2)) \geq \lambda F(K_1, L_1) + (1-\lambda)F(K_2, L_2).$$

II. Как определяется предельная производительность труда?

1. Величина $\frac{X}{L}$.

2. Частные производные выпуска по факторам $\frac{\partial F}{\partial L}$.

3. Логарифмическая производная факторов $\alpha_L = \frac{d\,ln\,X}{d\,ln\,L}$.

4. Величина $S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}$.

5. Величина $k = \frac{K}{L}$.

III. Дайте определение ПФ.

1. Среднегеометрическое темпов роста ресурсов $M = \sqrt[\alpha_K+\alpha_L]{K^{\alpha_K} L^{\alpha_L}}$.

2. Скалярная функция, если для любого вектора (K, L) и любого положительного λ она удовлетворяет соотношению $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\nu} F(K, L)$.

3. Функция $F(K, L)$, для которой для любых двух неотрицательных точек (K_1, L_1) и (K_2, L_2) и любого числа $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$F(\lambda(K_1, L_1) + (1-\lambda)(K_2, L_2)) \geq \lambda F(K_1, L_1) + (1-\lambda)F(K_2, L_2).$$

4. Зависимость между количеством используемых в производстве ресурсов (факторов производства) и объемом выпускаемой продукции.

5. Взвешенное среднегеометрическое частных показателей экономической эффективности $E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}$.

IV. Какая зависимость определяет связь между средней и предельной производительностью ОПФ в случае МПФ?

1. $ln\,X_t = ln\,A + \alpha\,ln\,K_t + \beta\,ln\,L_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t = ln\,\delta_t$, $M\varepsilon_t = 0$.

2. $M = \sqrt[\alpha_K+\alpha_L]{K^{\alpha_K} L^{\alpha_L}}$.

3. $S_K = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}$.

4. $\alpha_K = \frac{d\ln X}{d\ln K} = \lim\limits_{\substack{\Delta X \to 0 \\ \Delta K \to 0}} \frac{(\Delta X/X)}{(\Delta K/K)}$.

5. $\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{\alpha_1 X}{K}$.

V. Какой экономический смысл имеет коэффициент α_1 МПФ $X = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$?

1. Предельная норма замены фондов трудом.

2. На сколько % изменится выпуск при увеличении ОФ на 1% .

3. Предельная норма замены труда фондами.

4. Тангенс угла наклона касательной к изокванте по отношению к отрицательному направлению оси абсцисс.

5. Масштаб производства.

Тема 2. Модели макроэкономической динамики

2.1. Модель Солоу

Рассмотрим однопродуктовую (односекторную) модель, характеризующуюся в каждый момент времени набором эндогенных переменных: X – валовой выпуск, Y – конечный продукт, C – непроизводственное потребление, I – инвестиции, L – трудовые ресурсы (число занятых), K – ОПФ и экзогенных переменных: λ – темп роста трудовых ресурсов, μ – коэффициент выбытия ОПФ, a – коэффициент прямых затрат, ρ – доля валовых капиталовложений в конечном продукте. Экзогенные переменные будем считают постоянными во времени.

В такой модели продукция экономики считается однородной, т.е. состоящей из одного продукта. Все предприятия рассматриваются нераздельно, объединены в одну производственную единицу (отсюда и второе название модели – односекторная). КП – часть ВВ, которая пошла на восстановление ОПФ, изношенных за год (амортизационные отчисления), а также на потребление и накопление. КП за вычетом амортизационных отчислений, идущий на потребление и накопление, называется НД.

Предполагается, что годовой выпуск в каждый момент времени определяется однородной неоклассической ПФ

$$X = F(K,L). \tag{2.1}$$

Выпишем основные балансовые соотношение модели. ВВ распределяется на производственное потребление и КП:

$$X = aX + Y \tag{2.2}$$

КП распределяется на валовые капитальные вложения (инвестиции) и непроизводственное потребление

$$Y = I + C.$$

Обозначим через A, амортизационные отчисления в году t. Обычно полагают, что амортизационные отчисления пропорциональны, имеющимся в наличии ОПФ

$$A = \mu K$$

Капиталовложения направляются на увеличение как ОПФ (здания, станки и т.д.), так и оборотных фондов (запасы, сырье в процессе обработки и т.д.). В это простой модели капиталовложениями в оборотные фонды будем пренебрегать и считать, что чистые капиталовложения приводят к росту ОПФ. Динамику ОПФ в этом случае можно описать соотношением $\Delta K = -\mu K\Delta t + I\Delta t$, откуда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I,\ K(0) = K_0.$$

Если предположить, что трудящиеся составляют постоянную долю в населении страны, которое растет пропорционально уже имеющемуся населению: $\Delta L = \lambda L\Delta t$, откуда $\frac{dL}{L} = \lambda dt$, $\ln L = \lambda t + \ln C$, $L = Ce^{\lambda t}$.

Используя начальное условие $L(0) = L_0$, получаем $L = L_0 e^{\lambda t}$.

Согласно (2.2) производственное потребление равно aX, а КП Y = (1-a)X, инвестиции $I = \rho(1-a)X$, фонд потребления $C = (1-\rho)Y$.

Таким образом, модель Солоу в абсолютных показателях имеет вид

$$\begin{gathered} X = aX + Y, \\ \frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \\ I = \rho(1-a)X, \\ C = (1-\rho)Y, (1-a), \\ L = L_0 e^{\lambda t}, \\ X = F(K, L). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Рассмотрим относительные переменные: $k = \frac{K}{L}$ – фондовооруженность, $x = \frac{X}{L}$ – производительность труда, $i = \frac{I}{L}$ – инвестиции на одного работающего, $c = \frac{C}{L}$ – потребление на одного работающего, $\rho = \frac{I}{Y}$ – доля валовых капиталовложений в КП.

Производя в уравнениях модели замену переменных $X = xL$, $K = kL$, $C = cL$, $I = iL$, $I = \rho Y$ получим уравнения модели в относительных переменных

$$\begin{gathered} \frac{dk}{dt} = -(\lambda + \mu)k + \rho(1-a)x, \\ i = \rho(1-a)x, \\ c = (1-\rho)(1-a)x, \\ x = f(k), \\ k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

2.2. Анализ экономики на основе модели Солоу

Прежде всего, исследуем вопрос о свойствах траекторий модели в стационарном режиме, когда относительные показатели не изменяются во времени $k = k_0$, $x = x_0$, $i = i_0$, $c = c_0$.

На стационарной траектории $\frac{dk}{dt} = 0$, поэтому

$$-(\lambda+\mu)k + \rho(1-a)f(k) = 0, \tag{2.5}$$

Построим графики функций $y = \rho(1-a)f(k)$ и $y = -(\lambda+\mu)k$ (рис. 2.1). Из рисунка видно, что имеются два решения. Это $k = 0$ и $k = k^*$. Точка $k = 0$ является решением уравнения (2.5) в силу того, что $f(0) = 0$. Ненулевая точка пересечения графиков $y = \rho(1-a)f(k)$ и $y = (\lambda+\mu)k$ может существовать не всегда или быть не единственной. При некоторых естественных предположениях о народном хозяйстве ($F(K,L)$ – неоклассическая и $\rho(1-a)f'(0) > \lambda$) точка k^* существует и единственна.

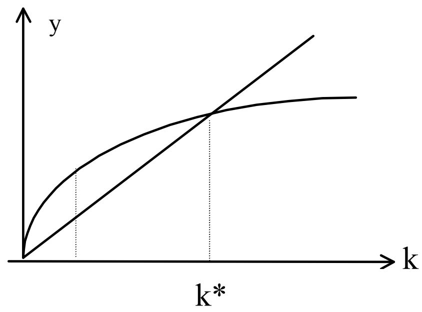


Рис. 2.1. Графическое решение уравнения (2.5)

Если в начальный момент система находилась в равновесной точке $k = 0$, то любое малое возмущение приведет ее в точку с $k > 0$, а далее система начнет все дальше уходить от исходного значения $k = 0$. В этом случае такая равновесная точка неустойчива. Рассматривать ее нет смысла.

В этом случае для любого значения k из интервала $0 < k < k^*$ имеем $(\lambda+\mu)k<\rho(1-a)f(k)$, поэтому для всех таких точек $\dfrac{dk}{dt} > 0$, т. е. на всех траекториях, начинающихся в любой точке интервала $(0, k^*)$, значение k будет расти до тех пор, пока величина k не достигнет значения k^*. При $k > k^*$ имеем $\dfrac{dk}{dt} < 0$, поэтому величина k, будет уменьшаться до тех пор, пока не достигнет значения k^*. Из проведенного анализа ясно, что все траектории уравнения (3.5) при любом исходном значении $k > 0$ стремятся к k^*. Это означает, что равновесная точка $k = k^*$ устойчива.

Если $k(t) = k^*$, то для модели (2.3) получаем $K(t) = k^* L_0 e^{\lambda t}$.

Аналогичным образом можно получить $X(t) = f(k^*)L_0 e^{\lambda t}$.

С тем же темпом растут потребление $C(t)$ и капиталовложения $I(t)$. Такую ситуацию называют режимом *сбалансированного роста.* Для модели (2.3) режим сбалансированного роста обладает тем свойством, что к нему сходятся все траектории модели при постоянной доле капиталовложений. Режим сбалансированного роста сам зависит от нормы капиталовложений ρ, так как от ρ зависит значение k^*: при росте ρ величина k^* возрастает.

Поскольку все траектории роста модели (2.3) сходятся к сбалансированному росту, который зависит от величины постоянной доли капиталовложений ρ, то возникает вопрос о том, какой режим сбалансированного роста предпочтительнее. Для этого прежде всего необходимо ввести критерий, по которому мы будем, сравнивать различные режимы. В модели сбалансированного роста в качестве критерия можно взять уровень потребления в расчете на одного трудящегося, т. е. величину

$$c=(1-\rho)(1-a)f(k^*),$$

причем k^* также зависит от величины ρ.

Зависимость $k^*(\rho)$ определяется соотношением (2.5). Поэтому $c(\rho)=(1-a)f(k^*)-(\lambda+\mu)k^*$, где $k^*=k^*(\rho)$. Условие экстремума этой функции во внутренней точке отрезка [0,1], к которому принадлежат допустимые значения управления ρ, выписывается в виде

$$\frac{dc(\rho)}{dt} = 0, \text{ или } ((1-a)f'(k^*) - (\lambda+\mu))dk^*/d\rho = 0.$$

Согласно (2. 5) $dk^*d\rho>0$ и условие экстремума принимает вид

$$f'(k^*) = (\lambda+\mu)/(1-a). \tag{2.6}$$

Заметим, что в случае интересующих нас ПФ народного хозяйства, для которых характерны большое значение $f'(0)$ и малое значение $f'(k)$ при достаточно больших k, всегда существует единственная k^*, удовлетворяющая соотношению (2.6). Наилучшее значение доли капиталовложений в конечном продукте ρ можно определить из соотношения (2.5):

$$\rho^* = (\lambda+\mu)k^*/(1-a)f(k^*). \tag{2.7}$$

Легко проверить, что полученное значение ρ приведет к максимальному, а не минимальному потреблению, а также то, что максимальное потребление не достигается при крайних значениях величины ρ, т. е. при $\rho = 0$ или $\rho = 1$.

Для расчета оптимальной нормы накопления нужно задать конкретную ПФ. Для ПФ Кобба-Дугласа $f(k)=Ak^{\alpha}$. Из (2.6) получаем $(1 - a)\alpha A\ k^{\alpha-1} = (\lambda + \mu)$, откуда $k^* = \left(\frac{(\lambda+\mu)}{(1-a)A\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}$. Подставляя k в (2.7), будем иметь $\rho^* = \alpha$.

Для ПФ Кобба-Дугласа оптимальная норма накопления совпадает с ее эластичностью по ОПФ («Золотое» правило накопления).

Подведем предварительный итог исследования модели (2.3) при постоянной норме накопления ρ. В любом случае траектории системы асимптотически сходятся к сбалансированному росту, темп роста на котором равен темпу роста населения страны. Такой результат неутешителен, поскольку потребление на душу населения при сбалансированном росте экономики остается постоянным. Возникает вопрос о том, нельзя ли добиться лучших результатов, если использовать изменяющееся во времени управление $\rho(t)$. Проведем соответствующий анализ.

Рассмотрим модель (2.3) или модель (2.4) с переменным управлением $\rho(t)$. Прежде всего необходимо решить проблему выбора критерия.

Теперь, при изменяющемся во времени управлении $\rho(t)$, потребление на одного трудящегося в единицу времени также является переменной величиной. Поэтому часто в качестве критерия оптимальности предполагается максимизировать дисконтированную сумму потребления, создаваемого в течение всего периода планирования, т. е.

$$V = \int_0^T \eta(t)c(t)dt \Rightarrow max, \tag{2.7}$$

где η(t) – функция дисконтирования, отражающая меру предпочтения потребления в данный момент относительно потребления того же продукта в последующие моменты времени, T – время планирования.

Обычно предполагают, что η(0) = 1 и η(t) является монотонно убывающей функцией времени t, например, $\eta(t) = e^{-\delta t}$, где δ – заданная неотрицательная величина.

При исследовании роста экономики страны за конечный период времени необходимо подумать и о том, что произойдет с экономикой за пределами этого периода. В нашей простой модели это означает, что необходимо позаботиться о том, чтобы основные фонды в расчете на одного трудящегося в конце исследуемого периода времени были достаточно велики, т. е. наложить ограничение на величину $k(T)$. Это ограничение имеет вид

$$k(T) = k_T, \tag{2.8}$$

где k_T – заданная величина.

Теперь задача может быть поставлена следующим образом: найти такую зависимость от времени доли накопления $\rho(t)$, чтобы для модели (2.4) с дополнительным условием (2.8) максимизировать критерий (2.7), причем величина доли накопления должна удовлетворять ограничению $0 \leq \rho(t) \leq 1$.

Поставленная задача не всегда имеет решение. Можно выбрать настолько большое значение k_T, что такая фондовооруженность окажется недостижимой для системы за период времени [0, T]. Рассмотрим множество всех достижимых за период [0, T], значений $k(T)$ и $c(T)$. Анализируя это множество, можно выбрать наиболее подходящее достижимое сочетание величин $k(T)$ и $c(T)$. Если в качестве k_T взять выбранную величину $k(T)$, то сформулированная здесь задача оптимизации будет иметь решение. Оказывается, что при достаточно больших значениях времени планирования T оптимальное управление $\rho(t)$ состоит в следующем: сначала необходимо выбрать такое значение $\rho(t)$, чтобы как можно быстрее выйти в точку k^*, определяемую из соотношения (2.6); затем в течение почти всего периода времени величина $\rho(t)$ должна быть равна ρ; в конце периода необходимо за минимальное время перевести систему из точки k^* в k_T. Таким образом, мы опять пришли к сбалансированному росту в модели (2.3) с максимальным потреблением на одного трудящегося.

Выводы

1. Цель построения теоретических моделей экономического роста – определить условия, обеспечивающие равенство между совокупным спросом и совокупным предложением в растущей экономике и совместимость динамического равновесия с полной занятостью.

2. Общей тенденцией современного мирового развития является долговременный экономический рост, который характеризуется увеличением реального ВНП и ВНП на душу населения. Возрастание реального объема производства может осуществляться как за счет экстенсивных факторов роста (наращивания ресурсов), так и за счет интенсивных (повышение эффективности их использования).

3. Отталкиваясь от простейшей производственной функции Кобба-Дугласа, Р. Солоу вывел стабильную модель экономического роста. В ее основе лежало «золотое правило» накопления, согласно которому выбытие капитала не должно превышать предельный продукт. По его мнению, в устойчивом состоянии равновесия капитал, труд и объем продукта увеличиваются одинаковыми темпами, равными темпу роста населения. Более быстрый темп роста населения окажет влияние на ускорение темпов роста экономики, однако выпуск на душу населения будет снижаться в устойчивом состоянии. В свою очередь, увеличение нормы сбережений приведет к более высокому доходу на душу населения и расширит отношение «капитал-труд», но не повлияет на темпы роста в устойчивом состоянии. Поэтому условием ускоренного роста в устойчивом состоянии является скорость технологических изменений.

4. Как показали последние модели, повышение уровня сбережений может привести к увеличению темпов роста в устойчивом состоянии, если использовать внешние эффекты.

Тренировочные задания

Задание 2.1. Производство НД отображается ПФ $Y = (KL)^{0.5}$. В период t_0 в хозяйстве было 10 ед. труда и 640 ед. капитала. Темп прироста трудовых ресурсов равен 3% за период. Предельная склонность к сбережению равна 50%. В каком направлении будет изменяться темп прироста НД в соответствии с моделью экономического роста Солоу?

Задание 2.2. В условиях задания 2.1 какой объем капитала обеспечит в исходных условиях равновесный рост с периода t_1?

Задание 2.3. Страна располагает 256 ед. капитала и 16 ед. труда. Технология производства представлена ПФ $Y = (KL)^{0.5}$. Предельная склонность к сбережению равна 0.2. Система цен совершенно эластична. Какой темп равновесного роста в описанных условиях не изменил бы исходной производительности труда?

Тесты

I. Функция предложения труда в модели Солоу определяется равенством

1. $L = const$ 2. $Y= K^{0.5}L^{0.5}$ 3. $X = F(K,L)$ 4. $L = L_0e^{\lambda t}$ 5. $L = aL + Y$

II. Сформулируйте «Золотое» правило накопления в модели Солоу с ПФ Кобба-Дугласа.

1. В условиях совершенной конкуренции при любой норме сбережений рыночная экономика тяготеет к сбалансированному росту, при котором НД и капитал увеличиваются с темпом, равным темпу роста предложения труда.
2. Средняя норма потребления достигает максимума, когда темп прироста капитала равен предельной производительности капитала.
3. Совместимость динамического равновесия с полной занятостью.
4. Оптимальная норма накопления совпадает с ее эластичностью по ОПФ.
5. Условия, обеспечивающие равенство между совокупным спросом и совокупным предложением в растущей экономике.

III. Наилучшее значение доли капиталовложений в КП определяется равенством ...

1. $(1 - a)\alpha A\, k^{\alpha-1} = (\lambda + \mu)$. 2. $c = (1-\rho)(1-a)f(k^*)$.

3. $-(\lambda+\mu)k + \rho(1-a)f(k) = 0$. 4. $f'(k^*) = (\lambda+\mu)/(1-a)$.

5. $k^* = \left(\dfrac{(\lambda+\mu)}{(1-a)A\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}$.

IV. Используя модель Солоу с ПФ Кобба-Дугласа, у которой $A = 10^6$ и $\alpha = 1/2$, найти значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории, для которой норма накопления $\rho = 0{,}2$, выбытие фондов $\mu = 0{,}2$ за год, а годовой прирост трудовых ресурсов $\nu = 0{,}05$.

1. $50*10^8$, $7*10^{10}$, $0.75*10^{11}$. 2. $64*10^8$, $8*10^{10}$, $0.75*10^{10}$.
3. $50*10^8$, $8*10^{10}$, $0.64*10^{12}$. 4. $64*10^{10}$, $8*10^{11}$, $0.64*10^{12}$.
5. $50*10^8$, $8*10^{12}$, $0.65*10^{11}$.

V. Балансовые соотношения модели Солоу. Установите соответствие.

ВВ распределяется на производственное потребление и КП.

КП распределяется на валовые капитальные вложения (инвестиции) и непроизводственное потребление...

1. $Y = I + C$. 2. $A = \mu K$. 3. $X = aX + Y$. 4. $Y = (1 - a)X$ 5. $I = \rho(1-a)X$, 6. $C = (1-\rho)Y$.

Тема 3. Модели межотраслевого баланса

3.1. Статическая модель линейной многоотраслевой экономики Леонтьева. Продуктивность и прибыльность модели

Основой многих линейных моделей производства является схема межотраслевого баланса.

Пусть производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. Чистая отрасль – экономическая абстракция, не обязательно существующая реально в виде каких-то организационных форм типа министерства, треста, объединения. Так, под отраслью «электроэнергетика» можно понимать совокупность всех электростанций вне зависимости от их ведомственной принадлежности. Подобная идеализация позволяет провести детальный анализ сложившейся технологической структуры общественного производства и распределения.

Предположим, что каждая отрасль выпускает продукт только одного типа и разные отрасли выпускают разные продукты. Таким образом, в рассматриваемой экономической системе выпускается n видов продуктов. В процессе производства своего вида продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей.

Введем обозначения: числа от 1 до n – номера отраслей, величина a_{ij} – объем продукции отрасли с номером i, израсходованной отраслью j в процессе производства единицы продукции. Число x_j, равно общему объему продукции (ВВ) j-й отрасли за некоторый промежуток времени (например, плановый год), а значение y_j, показывает объем продукции j-й отрасли, который был потреблен в непроизводственной сфере (объем КП), числа x_{ij} – объем продукции i-й отрасли расходуемый отраслью j в процессе производства балансовые уравнения имеют вид:

$$\sum x_{ij} = x_i - y_i. \; i = 1, 2,..., n. \tag{3.1}$$

Единицы измерения всех величин могут быть либо натуральными (тонны, штуки, киловатт-часы и т. д.), либо стоимостными, в зависимости от чего различают *натуральный* и *стоимостной межотраслевой баланс.*

Числа a_{ij}, i= 1, 2, ..., n, в некотором смысле характеризуют технологию j-и отрасли в отчетный период и носят название *коэффициентов прямых затрат* отрасли с номером j.

Матрица $A = (a_{ij})$ – матрица прямых затрат несет много информации о структуре межотраслевых связей. Сравнивая такие матрицы, составленные в достаточно разнесенные моменты времени, можно проследить направления изменения и развития технологии.

Будем считать сложившуюся технологию производства линейной (материальные издержки пропорциональны объему выпускаемой продукции) и неизменной в течение некоторого промежутка времени (a_{ij} – постоянные коэффициенты). Этот промежуток может быть равен одному календарному периоду (скажем, году) или нескольким.

Для осуществления объема x_j ВВ продукции отрасли j необходимо и достаточно произвести затраты в объемах $x_j a_{ij}$, i == 1, 2, ..., n продукции всех отраслей. Каждое из допущений является идеализацией реальной ситуации.

Обозначим через X вектор ВВ, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда часть общего ВВ, израсходованная на производственные нужды в процессе производства определяется вектором

$$(\sum a_{1j}\, x_j, \sum a_{2j}\, x_j, \ldots, \sum a_{nj}\, x_j). \tag{3.2}$$

В матричных обозначениях вектор производственных затрат равен AX. Тогда свободный остаток равный $Y = X - AX$ будет использован на непроизводственные цели и накопление. Основной вопрос, возникающий в планировании производства на заданный период, однако, формулируется, как правило, наоборот: при заданном векторе Y КП требуется решить систему:

$$X - AX = Y, \ X \geq 0. \tag{3.3}$$

Условие неотрицательности вектора X создает определенные трудности при исследовании вопроса о существовании решения системы (3.3).

Уравнения (4.3) вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов X, Y называется моделью Леонтьева. В том случае когда решение системы (3.3) существует для любого неотрицательного вектора Y конечного спроса, говорят, что модель Леонтьева (и матрица A) продуктивна.

Особенность матриц A в модели Леонтьева состоит в том, что все элементы этой матрицы неотрицательны ($A \geq 0$).

Рассмотрим балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева (модель равновесных цен). Обозначим через $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли; тогда i-я отрасль получит доход, равный $p_i x_i$. Часть дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли, второй отрасли и т.д. соответственно в объемах $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма $a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_n$. Для выпуска x_i единицы продукции затраты составят $x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_n)$.

Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, обозначим через V_i (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Таким образом, имеет место следующие уравнения:

$$p_i x_i - x_i (a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_n) = V_i, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Разделив эти равенства на x_i, получаем

$$p_i - (a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_n) = v_i, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

где v_i – норма добавленной стоимости (добавленная стоимость на единицу выпускаемой продукции). Найденные равенства могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\overline{p} - A^T \overline{p} = \overline{v}, \tag{3.6}$$

где $\overline{v}$ – вектор норм добавленной стоимости, A^T – матрица транспонированная для A.

Полученная система уравнений является двойственной к системе уравнений модели Леонтьева.

Система (3.6) называется прибыльной, если она разрешима в неотрицательных $\overline{p} \geq 0$. Продуктивность и прибыльность модели Леонтьева эквивалентны: из продуктивности следует прибыльность и наоборот.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

3.2. Матрица полных затрат

Решение системы (3.3) определяется формулой $X = (E - A)^{-1}Y$. Данная формула имеет важную экономическую интерпретацию. Разложим правую часть формулы в ряд

$$X = (E - A)^{-1}Y = Y + AY + A^2Y + \ldots + A^k Y + \ldots \tag{3.7}$$

Для получения вектора X, обеспечивающего конечный спрос Y, необходимо сначала произвести количество продуктов Y. Для получения конечного продукта Y необходимо затратить количество продукции AY, которое нужно сначала произвести. Следовательно, ВВ включает в себя и вектор AY. При производстве вектора AY возникают дополнительные затраты $A\,AY = A^2Y$, и т.д. Поэтому ряд (3.7) называется *полными затратами* на производство конечного спроса Y, а матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

3.3. Свойства неотрицательных матриц

Изложим эти свойства без доказательства. Всюду в данном разделе буквой A обозначается квадратная матрица с неотрицательными элементами, N— множество, состоящее из первых n натуральных чисел.

Определение. Пусть $S \subseteq N$, $S' = N - S$. Говорят, что множество S *изолировано,* если $a_{ij} = 0$, как только $i \in S'$, $j \in$ S.

Понятие изолированности множества S допускает экономическую интерпретацию на языке модели Леонтьева. Так, изолированность множества S в модели Леонтьева означает, что отрасли, номера которых принадлежат множеству S, не нуждаются в товарах, производимых отраслями, номера которых принадлежат множеству S'. Если перенумеровать индексы так, чтобы $S = \{1, 2, ..., k\}$, $S' = \{k + 1, ..., n\}$, что соответствует одновременной перестановке строк и столбцов матрицы A, то матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

где A_1 и A_3—квадратные подматрицы размеров $k \times k$ и $(n - k)\times(n - k)$ соответственно.

Матрица A называется *неразложимой,* если в множестве N нет изолированных подмножеств, т.е. если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду (3.8).

Неразложимость матрицы A *в* модели Леонтьева означает, что каждая отрасль использует хотя бы косвенно продукцию всех отраслей.

Отметим несколько простых свойств неразложимых матриц.

а) Неразложимая матрица не имеет нулевых строк и столбцов.

б) Если матрица A неразложима и $y > 0$, то $Ay^T > 0$.

в) Пусть $y \geq 0$, $y \neq 0$; тогда вектор $z = (E + A)y^T$ имеет меньше нулевых координат, чем вектор y, если это возможно. Кроме того, если A неразложима $x \geq 0$, $x \neq 0$, то из неравенства $Ax^T \leq \alpha x$ следует, что $\alpha > 0$, $x > 0$.

г) **Теорема 1.** (Фробениус – Перрон о спектральных свойствах неотрицательных матриц).

1. Неразложимая матрица A имеет положительное собственное число λ_A такое, что модули всех остальных собственных чисел матрицы A не превосходят λ_A.

2. Числу λ_A отвечает единственный (с точностью до скалярного множителя} собственный вектор X_A, все координаты которого ненулевые и одного знака (т. е. его можно выбрать положительным).

Собственные векторы X_A и p_A матриц A и A^T соответственно, а также число λ_A будем называть *фробениусовыми.*

Отметим, что если матрица A неразложима, то λ_A является единственным собственным числом, для которого существует неотрицательный собственный вектор.

Неразложимую матрицу A будем называть *устойчивой,* если для любого вектора x последовательность $A^k x$, $k = 1, 2,...,$ сходится.

Пример матрицы, не являющейся устойчивой: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Неразложимая матрица A называется *циклической,* если множество $N = \{1, 2, ..., n\}$ можно так разбить на m непересекающихся подмножеств $S_0, S_1, ..., S_{m\text{-}1}$, что если $a_{ij} > 0$, $i \in S_r$, $r \geq 1$, то $j \in S_{r-1}$, а при $i \in S_0$ $j \in S_{m\text{-}i}$.

Остальные неразложимые матрицы называются *примитивными.*

Теорема 2. *Примитивная матрица устойчива.*

Эта теорема устанавливает зависимость свойства матрицы быть устойчивой от ее внешнего вида. Вместе с тем свойство матрицы быть устойчивой полностью определяется и свойствами ее спектра – множеством собственных чисел. Справедливо следующее утверждение.

Неразложимая неотрицательная матрица A устойчива тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $|\lambda| < \lambda_A$ *для любого ее собственного числа* $\lambda \neq \lambda_A$.

3.4. Анализ продуктивности модели Леонтьева

Продуктивность модели Леонтьева полностью определяется величиной собственного числа λ_A матрицы A коэффициентов прямых затрат.

Теорема 3. Модель Леонтьева (3.1) продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A < 1$.

Достаточность. Поскольку $AX = \lambda_A X$, то $\lim\limits_{K\to\infty} A^k X = \lim\limits_{K\to\infty} \lambda_A X = 0$. Учитывая, что $X > 0$, $A^k \geq 0$, получаем, что $\lim\limits_{K\to\infty} A^k = 0$.

Рассмотрим равенство $(E - A)(E + A + A^2 + ... + A^{k\text{-}1}) = E - A^k$.

Поскольку предел при $k \to \infty$ правой части существует, то существует предел и левой части, т. е. $(E - A)(E + A + A^2 + ... + A^k +. ..) = E$.

Этим доказано, что ряд $E + A + A^2 + ... + A^k +. ..$ сходится, а матрица $E - A$ невырождена. Получаем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + ... + A^k + ...$$

Поскольку $A^k \geq 0$, $k = 1, 2, ...,$ то $(E - A)^{-1} \geq 0$, из чего непосредственно вытекает, что для любого вектора конечного спроса $Y \geq 0$ существует неотрицательное решение системы уравнений (3.3):

$$X = (E - A)^{-1} Y, \tag{3.14}$$

что и означает продуктивность модели Леонтьева.

Необходимость. Пусть модель Леонтьева продуктивна. Возьмем в качестве вектора КП Y в уравнении (3.1) произвольный положительный вектор $Y > 0$. По предположению о продуктивности существует вектор $X \geq 0$ такой, что $X - AX^T = Y$, т.е. $X > AX^T \geq 0$. Умножая последнее неравенство скалярно на вектор строку цен $p_A > 0$, имеем $p_A X > p_A AX^T = p_A\lambda_A X^T$. Поскольку $p_A X^T > 0$, получаем $\lambda_A < 1$. Теорема доказана.

Теорема 3 дает возможность проверять модель Леонтьева на продуктивность, однако ее формулировка абстрактна и далека от экономических интерпретаций. Сформулируем без доказательства достаточный признак продуктивности модели Леонтьева, наиболее удобный для проверки продуктивности матрицы межотраслевого баланса в натурально-стоимостной форме.

Если матрица A неотрицательна и неразложима, сумма элементов каждой строки не больше 1 *и хотя бы для одной строки строго меньше* 1, *то модель Леонтьева, определяемая матрицей A, продуктивна.*

Обсудим экономический смысл условий сформулированного достаточного признака продуктивности матрицы *A*. Пусть *A* – матрица межотраслевого баланса в натурально-стоимостной форме. Другими словами, элемент a_{ij} матрицы показывает, на какую сумму j-я отрасль расходует продукции отрасли с номером i в расчете на 1 рубль своей продукции. Тогда величина $r_i = \Sigma a_{ij}$ выражает суммарную величину расхода продукции i-й отрасли (выраженную в деньгах) всеми отраслями при условии, что каждая из них выпускает объем продукции стоимостью в 1 рубль.

Очевидно, что условие $r_i \leq 1$, $i == 1, 2, ..., n,$ весьма естественно – оно означает, что i-я отрасль способна удовлетворить запросы всех отраслей. Вместе с тем простые примеры показывают, что одного этого условия недостаточно; так, матрица $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ не является продуктивной.

Таким образом, если модель Леонтьева продуктивна, то вектор валового выпуска, который необходим для удовлетворения конечного спроса *Y*, определяется формулой (3.14).

3.5. Модель Леонтьева и теория трудовой стоимости Маркса

Статическая модель Леонтьева может быть использована для рассмотрения вопрос использования и распределения трудовых ресурсов. Обозначим через $l_j > 0$ – затраты трудовых ресурсов при единичной интенсивности данного технологического процесса (отрасли) (числа l_j, $j = 1, 2, ..., n,$ могут измеряться либо в человеко-часах, либо просто числом работающих), $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ – вектор затрат трудовых ресурсов, L – общий объем трудовых ресурсов. Объем затрат трудовых ресурсов в этом случае равен (X, l). Поэтому допустимым решением системы (3.3) является в этом случае любой неотрицательный вектор *X,* удовлетворяющий уравнению (3.3) и неравенству $(X, l) \leq L$.

В связи с этим сформулируем следующую экстремальную задачу.

Пусть вектор $Y \geq 0$ задает не конечный спрос, а лишь структуру конечного спроса. Можно, например, считать, что $\|Y\| = 1$. Рассмотрим задачу составления оптимального плана

$$\max \alpha \tag{3.16}$$

$$X - AX = \alpha Y, \tag{3.17}$$

$$(X, l) \leq L, \tag{3.18}$$

$$X \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{3.19}$$

которую можно интерпретировать как стремление максимизировать количество выпущенных «комплектов» Y. Содержанием этой задачи является рациональное распределение трудовых ресурсов. Можно доказать, что если матрица *A* продуктивна, то задача (3.16) – (3.19) имеет решение.

Построим к ней двойственную задачу:

$$\min Lq \tag{3.20}$$

$$ql \geq p(E-A), \tag{3.21}$$

$$(Y, p) \geq 1, \tag{3.22}$$

$$p \geq 0, q \geq 0. \tag{3.23}$$

Здесь p – неотрицательный n-мерный вектор, q – число. Вектор p, число q оценки вектора спроса Y и общего количества трудовых ресурсов L соответственно.

Если матрица A неразложима, то любой вектор X, участвующий в решении задачи (3.16) – (3.19), является строго положительным: $X > 0$. В самом деле, из продуктивности и неразложимости матрицы вытекает, что $(E-A)^{-1} > 0$. Тогда из (3.17) следует, что $X \geq \alpha (E-A)^{-1}\, Y > 0$, то $X > 0$. По условию $\alpha > 0$.

По теоремам двойственности при оптимальном решении исходной и двойственной задачи выполняются равенства:

$$\alpha = qL,\ \ lq = p(E-A),\ (Y, p) = 1.$$

Откуда легко получить

$$\alpha = qL,\ \ p = \gamma l^*,$$

где $\gamma = (l^*,\ Y)^{-1}$ число, $l^* = l(E-A)$ – вектор полных трудовых затрат.

Число α равно общей стоимости вектора товаров αY при ценах p. Если положительные компоненты вектора Y соответствуют товарам потребительского спроса, то полученное первое уравнение выражает равенство спроса и предложения в стоимостном выражении – цена выпущенного объема конечной продукции равна общей сумме денег, полученных людьми, участвующими в процессе производства, в качестве заработной платы.

Второе равенство сводится к следующему: вектор p цен на товары прямо пропорционален вектору полных трудовых затрат. Этот вывод перекликается с теорией трудовой стоимости К. Маркса. В самом деле, один из основных тезисов теории трудовой стоимости состоит в том, что в основе величины стоимости товара лежит количество общественно необходимого труда, требующегося для производства этого товара. Таким образом, можно констатировать, что полученный вывод не противоречит теории трудовой стоимости К. Маркса.

3.6. Агрегирование нормативных показателей

При моделировании межотраслевых связей важным является вопрос агрегирования нормативных показателей.

Рассмотрим пример. Пусть задана таблица межотраслевых потоков для четырех отраслей (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Производ. отрасль	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3	4		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	y_2	x_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	y_3	x_3
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	y_4	x_4

Определим параметры агрегирования при объединении второй и третьей отраслей.

Выделим в табл. 3.1 отрасли, подлежащие агрегированию. Присвоим новой отрасли индекс k и составим другую таблицу, введя в нее отрасль *k* (табл. 3.2). Агрегированными окажутся те межотраслевые потоки, которые содержат индекс *k*.

Таблица 3.2

Производ. отрасль	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	k	3		
1	x_{11}	x_{1k}	x_{13}	y_1	x_1
k	x_{k1}	x_{kk}	x_{k3}	y_k	x_k
4	x_{41}	x_{4k}	x_{43}	y_4	x_4

Определим поток из i-й отрасли в отрасль k. Поток x_{ik} объединит все потоки из i-й отрасли в отрасли, которые образовали k-ю отрасль. Для нашего случая

$$x_{ik} = x_{i2} + x_{i3}, \quad i = 1,4.$$

Сформируем поток из k-й отрасли в j-ю. Поток x_{kj} объединяет потоки всех отраслей, направленных в j-ю отрасль, т. е. входящих в k-ю отрасль. Для нашего случая

$$x_{kj} = x_{2j} + x_{3j}, \quad j = 1,4.$$

Поток k-й отрасли на собственное воспроизводство включит все межотраслевые потоки, оставшиеся внутри этой отрасли, т.е.

$$x_{kk} = x_{22} + x_{23} + x_{32} + x_{33}.$$

Зная агрегированные потоки, найдем коэффициенты прямых затрат агрегированных отраслей. Тогда коэффициент прямых затрат i-й отрасли на воспроизводство единицы продукции j-й отрасли равен отношению потока из i-й отрасли к валовой продукции j-й отрасли:

$$a_{ij} = x_{ij} / x_j, \quad i = 1, k, 4; \quad j = 1, k, 4.$$

Коэффициенты прямых затрат агрегированной матрицы можно вычислить и с помощью алгоритма.

По таблице межотраслевых потоков (см. табл. 3.1) построим матрицу коэффициентов прямых затрат A:

$$a_{ij} = x_{ij} / x_j, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Далее сформируем оператор агрегирования T. Для этого произведем деформацию единичной матрицы четвертого порядка (размерность единичной матрицы равна размерности исходной таблицы межотраслевого баланса) по следующему правилу: выделим в единичной матрице E те строки, номера которых совпадают с номерами агрегируемых отраслей, и просуммируем их. Результат внесем в k-ю строку матрицы T. Все остальные строки переписываем в матрицу без изменения. Для нашего примера

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица T есть результат «горизонтальной деформации» матрицы E.

Построим деформированную весовую матрицу W. Для этого введем веса W_i, означающие вклад валовой продукции исходной i-й отрасли в валовую продукции отраслей, представленных в новой агрегированной таблице.

Так, 1-я и 4-я отрасли в нашем примере (см. табл. 3.2) не подлежат агрегированию. Следовательно,

$W_1 = 1$, $W_2 = x_2 / (x_2 + x_3)$, $W_3 = x_3 / (x_2 + x_3)$, $W_4 = 1$.

Составим весовую матрицу W:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Деформируем матрицу W по столбцам, объединив второй и третий столбцы. Тогда

$$W^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где W^* – весовой оператор агрегирования.

Для получения матрицы коэффициентов прямых затрат с учетом агрегирования достаточно перемножить следующие матрицы:

$$\mathrm{A}_{\text{агрег}} = \mathrm{TAW}^*.$$

Выводы

1. Анализ межотраслевого баланса дает комплексную характеристику процесса формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе.

2. В основу схемы межотраслевого баланса положено разделение совокупного продукта на две части, играющие различную роль в процессе общественного воспроизводства, – промежуточный и конечный продукт.

3. Основной вопрос, возникающий в планировании производства на заданный период формулируется, как правило, следующим образом: при заданном векторе Y конечного потребления требуется определить необходимый объем валового выпуска, т.е. решить систему: $X - AX = Y$, $X \geq 0$. Условие неотрицательности X создает определенные трудности при исследовании вопроса о существовании решения системы.

4. Продуктивность модели Леонтьева полностью определяется величиной фробениусова собственного числа λ_A матрицы A коэффициентов прямых затрат.

5. Статическая модель Леонтьева может быть использована для рассмотрения вопрос использования и распределения трудовых ресурсов.

6. При моделировании межотраслевых связей важным является вопрос агрегирования нормативных показателей.

Тренировочные задания

Задание 3.1. Выяснить, при каких значениях $\alpha > 0$ матрица

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0.9 \end{pmatrix}$$

будет продуктивной.

Задание 3.2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.3. Дан вектор $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ конечного продукта и матрица $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ межотраслевого баланса. Найти вектор валового выпуска X.

Тесты

I. Какой смысл имеют коэффициенты матрицы $(E - A)^{-1}$.

1. Объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j на производство конечной продукции.
2. Затраты продукции i-й отрасли на воспроизводство единицы продукции j-й отрасли.
3. Часть общего ВВ, израсходованная на производственные нужды в процессе производства.
4. Затраты ВВ i-й отрасли на воспроизводство единицы КП j-й отрасли.
5. Объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе производства.

II. Экономический смысл понятия неразложимости технологической матрицы в модели Леонтьева.

1. Любой продукт производится в большем количестве, чем используется, значит накапливаются его излишки.
2. Любая отрасль использует, хотя бы косвенно, продукцию всех отраслей.
3. Сложившуюся технологию производства можно считать неизменной.
4. Каждая отрасль способна произвести любой объем своей продукции при условии, что ей будет обеспечено сырье в необходимом количестве.
5. Данная технология может удовлетворить любой конечный спрос.

III. Сформулируйте теорему Фробениуса – Перрона о спектральных свойствах неотрицательных матриц.

1. Модель Леонтьева (1.1) продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A < 1$.
2. Если матрица A неотрицательна и неразложима, сумма элементов каждой строки не больше 1 и хотя бы для одной строки строго меньше 1, то модель Леонтьева, определяемая матрицей A, продуктивна.

3. Неразложимая неотрицательная матрица A устойчива тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $|\lambda| < \lambda_A$ для любого ее собственного числа $\lambda \neq \lambda_A$.

4. Неразложимая матрица A имеет положительное собственное число λ_A такое, что модули всех остальных собственных чисел матрицы A не превосходят λ_A. Числу λ_A отвечает единственный (с точностью до скалярного множителя} собственный вектор X_A, все координаты которого ненулевые и одного знака (т.е. его можно выбрать положительным).

5. Если вектор X_A является собственным вектором матрицы A, принадлежащим собственному значению λ_A, то для любого $k \neq 0$ вектор $k\,X_A$ тоже собственный вектор матрицы A, принадлежащий λ_A. Одному собственному значению может соответствовать несколько линейно независимых собственных векторов.

IV. Выяснить, при каких значениях $a > 0$ матрица

$$\mathrm{A} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

будет продуктивной.

1. $12 < a < 15$. 2. $10 < a$. 3. $a < 1/9$. 4. $a = 13; 15; 20$. 5. $2 < a < 6$.

V. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех отраслей: топливно-энергетическая отрасль, промышленность и сельское хозяйство. Пусть

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

транспонированная матрица прямых затрат, $v = (4;\ 10;\ 4)$ – вектор норм добавленной стоимости. Определить равновесные цены.

$$1. \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad 3. \begin{pmatrix} 18 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}; \quad 4. \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad 5. \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Тема 4. Классическая модель рыночной экономики

Это система взаимосвязанных моделей: рынка рабочей силы, рынка денег и рынка товаров. Все рынки описываются с помощью трех зависимостей: функции спроса, функции предложения и условия равновесия. В классической модели принимаются следующие допущения:

1) фирмы свободно могут нанимать и увольнять рабочих;

2) при прочих равных условиях предельный продукт труда снижается по мере роста рабочей силы;

3) предложение рабочей силы с ростом реальной заработной платы возрастает.

4) спрос на деньги прямо пропорциональная денежному доходу.

5) денежный рынок всегда находится в равновесии, денег всегда ровно столько, сколько экономике надо.

6) спрос на потребительские C и инвестиционные I товары зависит от нормы процента r – $C(r)$, $I(r)$ и каждый спрос убывает с ростом r.

7) Предложение товаров является функцией уровня занятости, определяемого на рынке рабочей силы $Y = Y(L°)$.

4.1. Рынок рабочей силы

Пусть Π – прибыль. Предположим, что все факторы производства, кроме труда, фиксированы, тогда получим

$$\Pi = pF(K, L) - wL, \tag{4.1}$$

где p – цена продукта, ставка заработной платы w, $X = F(K, L)$ – производственная функция, K – основные фонды, L – число занятых.

Условия максимума прибыли: $\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0,$ $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} < 0,$ т.е. $p\frac{\partial X}{\partial L} - w = 0$, $p\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$. Откуда вытекает, что в состоянии равновесия предельный продукт труда в стоимостном выражении равен ставке заработной платы w:

$$p\frac{\partial X}{\partial L} - w = 0. \tag{4.2}$$

Если $p\frac{\partial X}{\partial L} > w$, то необходимо увеличить наем, так как с каждой дополнительной единицей труда получали бы дополнительную прибыль $p\frac{\partial X}{\partial L} - w$, а если $p\frac{\partial X}{\partial L} < w,$ то прибыль убывает и необходимо сократить количество занятых.

Из соотношения (4.2) следует, что при падении ставки заработной платы предельный продукт также будет падать, пока снова не будет достигнуто равновесие. Перепишем соотношение (4.2) виде $\frac{\partial X}{\partial L} = \frac{w}{p}$ и продифференцируем его по реальной заработной плате $\frac{w}{p} : \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} \frac{\partial L}{\partial (w/p)} = 1$. Откуда имеем $\frac{\partial L}{\partial (w/p)} < 0$, т.е. с ростом реальной заработной платы спрос на рабочую силу падает.

Согласно допущению 3) предложение рабочей силы также является функцией реальной заработной платы.

Обозначим L^D – кривая спроса, а L^S – кривая предложения рабочей силы. Зависимости L^D и L^S от реальной заработной платы *p/v* показаны на рис. 4.1. Равновесие на рынке рабочей силы определяется равенством $L^D = L^S$.

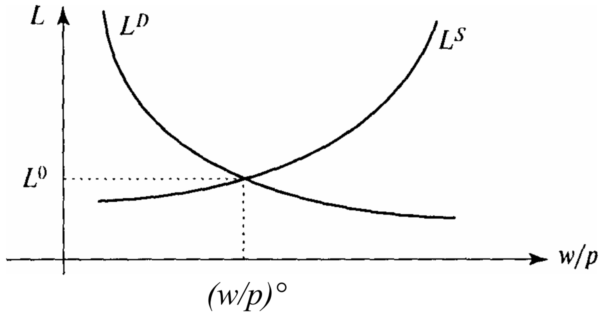


Рис. 4.1

Пусть в равновесии реальная заработная плата равна *(w/p)°,* а занятость – L^0 .

При (*w/p*) > (*w/p*)° имеем $L^D < L^S$, возникло избыточное превышение предложения рабочей силы, что привело бы к падению реальной заработной платы до величины (*w/p*)°.

При (*w/p*) < (*w/p*)° имеем $L^D > L^S$, возник недостаток рабочей силы, что привело бы к повышению реальной заработной платы до величины (*w/p*)°.

В каждом случае происходит возвращение к точке равновесия.

4.2. Рынок денег

Согласно допущению 4) спрос на деньги определяется формулой

$$M^D = kpY \tag{4.3}$$

Предложение денег рассматривается как фиксированная величина, регулируемая государством. Обозначим его M^S .

Кривые спроса и предложения денег представлены на рис. 4.2 .

Равновесие на денежном рынке определяется равенством $M^D = M^S$.

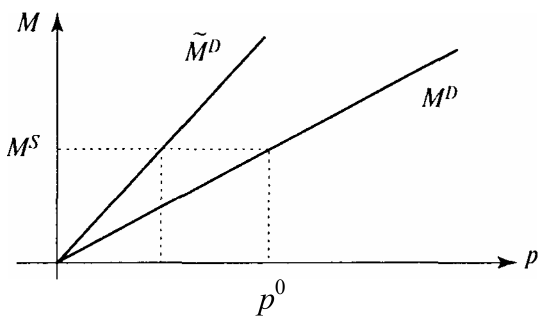


Рис. 4.2

Если при данном *Y* цена *p*<*p*°, то имеется избыточное предложение денег*,* в этом случае цены возрастут до уровня *p*°.

4.3. Рынок товаров

Спрос на товары – это сумма спроса на потребительские и инвестиционные товары $E(r) = C(r) + I(r)$.

Условие равновесия определяется равенством $Y(L°) = C(r) + I(r)$.

Объединяя уравнения и условия, задающие рынки рабочей силы, денег и товаров, получаем *классическую модель* в полном объеме:

Рынок рабочей силы

$$L^S = L^S(w/p),\ L^D = L^D\ (w/p), \tag{4.4}$$

$$L^D = L^S = L°. \tag{4.5}$$

Рынок денег

$$M^S = const,\ M^D = kpY, \tag{4.6}$$

$$M^D = M^S. \tag{4.7}$$

Рынок товаров

$$Y = Y(L°),\ E(r) = C(r) + I(r), \tag{4.8}$$

$$Y(L°) = E\ (r^0) = Y°. \tag{4.9}$$

Каждый рынок характеризуется своими кривыми спроса и предложения и точками равновесия. Все рынки связаны друг с другом. Достаточно одному из рынков выйти из состояния равновесия, как и все остальные рынки выйдут из этого состояния и потом будут стремиться к некоторому новому состоянию динамического равновесия.

Выводы

1. Согласно понятию классической дихотомии в экономике существует два параллельных рынка: один, на котором функционирует рабочая сила, производятся реальные блага и услуги, и второй – денежный рынок, основная задача которого обслуживание первого рынка.

2. В классической теории равновесие достигается установлением равновесного состояния на трех рынках: рынке рабочей силы, рынке товаров и услуг и денежном рынке.

3. По мнению классиков, равновесие на рынке труда устанавливается на основе предложения рабочей силы и спроса на нее со стороны бизнеса, причем естественным стабилизатором выступает гибкая заработная плата.

4. Основным постулатом является положение о том, что предложение товаров создает спрос на них, поэтому процесс перепроизводства невозможен.

5. Равновесие на рынке товаров и услуг устанавливается в том случае, если $S = I$, а это, в свою очередь возможно, когда процентная ставка (r) устраивает и тех, кто готов сберегать, и тех, кто готов инвестировать.

6. Объем денежной массы в экономической системе определяется уравнением Кембриджской школы $MV = PY$. При условии, что скорость оборота денег V является величиной постоянной, М (объем денег на рынке) определяется уровнем цен в экономике.

7. Государство должно сохранять принцип нейтральности по отношению к действующим на рынке экономическим субъектам, оставив за собой законодательные функции и контроль за их выполнением.

Тренировочные задания

Задание 4.1. Потребительский спрос характеризуется функцией $C = 50 + 0.5Y$, а инвестиционный – $I = 200 - 25\,r$. Функция спроса на деньги имеет вид $0.1Y + 24 - 2r$. Представьте в виде функции зависимость количества находящихся в обращении денег от реальной величины эффективного спроса, если уровень цен постоянно должен быть равен 1.5.

Задание 4.2. Что верно, что неверно

1) Представители классической школы утверждают, что спрос определяет производство в экономической системе.

2) Классики считали, что равновесие устанавливается на трех основных рынках: рынке товаров, рабочей силы и на рынке денег.

3) С точки зрения классиков в состоянии равновесия не все факторы могут быть вовлечены в процесс производства.

4) Равновесие на рынке труда устанавливается через гибкость заработной платы.

5) Согласно классическому подходу рынок благ и услуг играет решающую роль в установлении общего равновесия системы.

Задание 4.3. Выведите функцию спроса на труд при использовании 4 ед. капитала и технологии, представленной производственной функцией $Y=(KL)^{0.5}$.

Тесты

I. Продолжить утверждение «В состоянии равновесия предельный продукт труда в стоимостном выражении ...»

1. определяет функцию спроса на рабочую силу.
2. равен ставке заработной платы.
3. удовлетворяет условию $\dfrac{\partial X}{\partial L} > w$.
4. определяет функцию предложения рабочей силы.
5. Представляет доход рабочих на единицу продукции.

II. Экономический смысл условия $\dfrac{\partial L}{\partial (w/p)} < 0$

1. С ростом реальной заработной платы спрос на рабочую силу падает.
2. При падении ставки заработной платы предельный продукт также будет падать, пока снова не будет достигнуто равновесие.
3. Возникло избыточное превышение предложения рабочей силы, что привело бы к падению реальной заработной платы до (w/p)°.
4. Возник недостаток рабочей силы, что привело бы к повышению реальной заработной платы до величины (w/p)°.
5. С каждой дополнительной единицей труда можно получить дополнительную прибыль.

III. Что означает условие $p\dfrac{\partial X}{\partial L} > w$

1. С каждой дополнительной единицей труда можно получить дополнительную прибыль.
2. Необходимо увеличить наем рабочей силы.

3. Необходимо сократить количество занятых.

4. При падении ставки заработной платы предельный продукт также будет падать, пока снова не будет достигнуто равновесие.

5. Прибыль убывает и необходимо сократить количество занятых.

IV. Предложение денег в классической модели рыночной экономики.

1. Предложение денег определяется формулой $M^S = kpY$.

2. Предложение денег рассматривается как фиксированная величина M^S, регулируемая государством.

3. Предложение денег определяется формулой $M^S = kpY + Lq(r)$.

4. Предложение денег меняется прямо пропорционально изменению уровня цен.

5. Предложение денег можно представить формулой $M^S = kY$, где k- величина, обратная скорости обращения денег.

V. Экономическая интерпретация неравенства $(w/p) > (w/p)°$.

1. Из соотношения $(w/p) > (w/p)°$ следует, что при увеличении ставки заработной платы предельный продукт также будет увеличиваться, пока снова не будет достигнуто динамическое равновесие.

2. Все рынки связаны друг с другом. Достаточно одному из рынков выйти из состояния равновесия, как и все остальные рынки выйдут из этого состояния и потом будут стремиться к некоторому новому состоянию динамического равновесия.

3. Если $(w/p) > (w/p)°$, то необходимо увеличить наем рабочей силы, так как с каждой дополнительной единицей труда получали бы дополнительную прибыль.

4. Возникло превышение предложения над спросом на рабочую силу избыточное предложение рабочей силы привело к падению заработной платы *w* под влиянием вынужденной безработицы, при этом цены *p* упадут, но в меньшей степени и реальная заработная плата снизится.

5. Возник недостаток рабочей. Это вынудило бы предпринимателей увеличить оплату труда w, и тем самым увеличится и реальную заработную плату. Снова будет достигнуто динамическое равновесие.

Тема 5. Модели поведения потребителей. Предпочтение потребителя. Функция полезности

Товар – некоторое благо или услуга, поступившие в продажу в определенное время и в определенном месте. Пусть n – число товаров, а $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор-столбец товаров, приобретенных потребителем за определенный срок при заданных ценах и доходе за тот же срок.

Пространство товаров – множество всех наборов товаров **x** с неотрицательными координатами: $C = \{x: x \geq 0\}$.

Решение потребителя о покупке определенного набора товаров математически выбор конкретной точки в пространстве C.

Каждый потребитель имеет свои предпочтения на некотором. Запись $y \preceq x$ означает, что потребитель предпочитает набор x набору y или не делает между ними различий, запись $x \sim y$ – оба набора обладают одинаковой степенью предпочтения.

Потребуем выполнение следующих аксиом:

1) $x \succeq x$, для любого x (рефлексивность);

2) если $x \succeq y$, $y \succeq z$, то $x \succeq z$ (транзитивность);

3) для любой пары x, y либо $x \succeq y$, либо $y \succeq x$, либо и то и другое.

Кроме аксиом 1) – 3) на отношение предпочтения накладывают ряд других ограничений, главными из которых являются непрерывность и ненасыщаемость.

Отношение предпочтения $\succeq$ называется непрерывным на множестве X, если множество $\{ (x,y) \mid x \succ y \}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \times X$, т.е. если набор товаров x_0 строго предпочтительнее набора y_0, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение строгого предпочтения сохраняется.

Точкой насыщения называется наиболее предпочтительный набор $x \in X$, т.е. такой, что $x \succeq y$ для всех $x \in X$. Если X не содержит точки насыщения, то говорят, что имеет место ненасыщаемости, $x \succ y$, то $x > y$ (ненасыщаемость: больший набор всегда предпочтительнее меньшего).

На непрерывном множестве потребительских наборов можно задать числовую функцию $u(x)$.

Функция $u(x)$, определенная на множестве X, называется функцией полезности, соответствующей отношению предпочтения $\succeq$, если $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succeq y$.

Для каждого потребителя такое представление многовариантно. Например, если $u(x)$ – функция полезности, то $cu\ (x)$. $\ln u(x)$ – это также функции предпочтения.

Теорема Дебре (без доказательства). Если множество – X связно, а отношение предпочтения непрерывно, то функция полезности существует.

В теории потребления предполагается, что функция полезности обладает следующими свойствами:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ – с ростом потребления блага полезность растет; ($\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – предельная полезность i-го продукта).

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$ – с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется (первый закон Госсена);

3) $\lim\limits_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ – при очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности.

5.1. Поверхность безразличия. Предельные полезности и предельные нормы замещения товаров

Поверхностью безразличия называется гиперповерхность размера (n – 1), на которой полезность постоянна:

$$u(x) = const. \tag{5.1}$$

Наличие наборов товаров, обладающих одинаковой полезностью с точки зрения потребителя означает возможность замены одного набора другим равноценным набором.

Из условие (5.1) для двух товаров можно получить $\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$, откуда $-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} / \frac{\partial u}{\partial x_2}$, т.е. предельная норма замены первого товара вторым равна отношению предельных полезностей первого и второго товаров. Предельная норма замены показывает, сколько требуется единиц второго товара, чтобы заменить единицу первого товара.

5.2. Бюджетное множество

Пусть p – вектор – строка цен, тогда бюджетным множеством называется множество тех наборов товаров, которые может приобрести потребитель, имея доход Q: $B = \{x: px \le Q\}$.

Можно доказать, что бюджетное множество выпукло, ограничено и замкнуто.

5.3. Задача потребителя. Функция спроса на товары в зависимости от доходов и цен

Потребитель всегда стремится максимизировать свою полезность при ограниченности дохода:

$$u(x) \Rightarrow \max, \tag{5.2}$$

$$px \le Q, \tag{5.3}$$

$$x \ge 0. \tag{5.4}$$

Теорема. Решение задачи (5.2) – (5.4) существует и принадлежит границе бюджетного множества.

Действительно, так как $u(x)$ – непрерывная функция своих аргументов, а бюджетное множество ограничено и замкнуто, то по теореме Вейерштрасса $u(x)$ достигает максимум на B, т.е. решение задачи потребителя существует.

Предположим, что точка x^* максимума функции $u(x)$ не принадлежит границе бюджетного множества, тогда $px^* < Q$. В этом случае потребитель имеет неиспользованное количество денег $Q - px^*$ и на эту сумму он может приобрести дополнительный набор товаров $z > 0$. Рассмотрим набор $y = x^* + z$, тогда $py = p(x^* + z) = px^* + Q - px^* = Q$, т.е. $u(y) > u(x^*)$.

И так задача потребительского выбора можно заменить задачей

$$u(x) \Rightarrow \max, \tag{5.5}$$

$$px = Q, \tag{5.6}$$

$$x \geq 0. \tag{5.7}$$

Для решения этой задачи можно использовать метод множителей Лагранжа. Выпишем функцию Лагранжа $L(\lambda, x) = u(x) - \lambda(px - Q)$. Необходимые условия локального экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \quad i = 1, 2, ..., \mathrm{n}, \tag{5.8}$$

$$px = Q, \tag{5.9}$$

Если разрешить (5.8), (5.9) относительно x, получим точку *спроса* потребителя

$$x^* = x^*(p, Q). \tag{5.10}$$

Точка спроса (функция спроса) есть функция цен и дохода. Точка спроса лежит на границе бюджетного множества. Можно доказать, что она характеризуется тем, что в ней вектор предельных полезностей пропорционален вектору цен или в точке спроса отношение предельных полезности товара к его цене величина постоянная или в точке спроса предельная норма замещения одного товара другим равна обратному отношению цен.

5.4. Уравнение Слуцкого. Различные типы товаров

При исследовании функции спроса стержнем является уравнение Слуцкого: $\frac{\partial x^*}{\partial p_n} = (\frac{\partial x^*}{\partial p_n})_{comp} - (\frac{\partial x^*}{\partial Q})x_n^*$, характеризующее количественные зависимости между изменением цен на отдельные товары и доходов потребителей, с одной стороны, и структурой покупательского спроса – с другой.

В левой части уравнения стоит изменение спроса на некоторый товар при повышении или снижении его цены при неизменных остальных ценах и доходе, которая складывается из двух частей: влияния непосредственного изменения спроса (изменение реальной возможности приобретать товар в результате изменения цены на него) и косвенного влияния в результате переключения спроса на другие товары (компенсированное изменение цены).

Назовем n-й товар ценным, если $\frac{\partial x_n^*}{\partial Q} > 0$, т.е. если при увеличении дохода спрос на этот товар растет, и малоценным в противном случае.

Спрос на ценный товар падает при увеличении цены на него, это непосредственно следует из уравнения Слуцкого для этого товара.

Два товара i, j называются взаимозаменяемыми, если $(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i})_{comp} > 0$, т.е. если при возрастании цены на товар i при компенсирующем изменении дохода с одновременным падением спроса на товар i возрастет спрос на товар j. Например, животное масло и растительное масло.

В том случае, когда $(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i})_{comp} < 0$, то говорят – товары образуют взаимодополнительную пару (компенсируемое увеличение цены на бензин приводит к падению спроса на бензин и к падению спроса на автомобили). Продукт j называется *валовым заменителем* продукта *i*, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} > 0$.

Функция спроса $x^*(p, M)$ обладает свойством *валовой заменимости***,** если с увеличением цены на любой продукт j спрос на остальные продукты не убывает: $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \geq 0, j \neq i$.

В том случае, когда $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} > 0$, то функция спроса обладает свойством *сильной валовой заменимости.*

Выводы

1. Функция полезности (функцией предпочтений) может служить моделью поведения потребителя товаров и услуг и рассматриваться как целевая функция потребления. Потребитель стремится максимизировать эту функцию (с учетом ограничений, накладываемых на доходы, цены и т.д.). Из математических свойств данной функции выделим одно: она должна иметь положительную первую производную, что означает, при увеличении объема благ увеличивается и полезность. Выбирая между разными наборами благ, потребитель, очевидно, предпочтет те из них, полезность которых больше.

2. Точка спроса (функция спроса) есть функция цен и дохода, в которой выполняются необходимые условия локального экстремума функции полезности. Точка спроса лежит на границе бюджетного множества. Эти функции применяются в аналитических моделях спроса и потребления.

3. Можно доказать, что точка спроса характеризуется тем, что в ней вектор предельных полезностей пропорционален вектору цен или в точке спроса отношение предельных полезности товара к его цене величина постоянная или в точке спроса предельная норма замещения одного товара другим равна обратному отношению цен.

4. Наибольшее распространение получили однофакторные функции, отражающие зависимость спроса от уровней семейных доходов. Соответствующие этим функциям кривые названы *кривыми Э. Энгеля* по имени впервые изучившего их немецкого ученого. Большую роль играет коэффициент *эластичности*, показывающий относительное изменение потребления при изменении дохода на единицу. Коэффициенты эластичности различны для разных благ в зависимости от степени удовлетворения соответствующей потребности и ее настоятельности.

5. Точка спроса строится также для анализа соотношения спроса и цен. Для большинства благ действует зависимость: чем выше цена тем ниже спрос, и наоборот.

6. *Уравнения Слуцкого* – уравнения, характеризующие количественные зависимости между изменением цен на отдельные товары и доходов потребителей, с одной стороны, и структурой покупательского спроса – с другой. Наиболее просто основное уравнение Слуцкого формулируется так: *изменение спроса = эффект изменения дохода +*

эффект замещения. Иными словами, изменение спроса на некоторый товар при повышении или снижении его цены складывается из двух частей: влияния непосредственного изменения спроса (т.е. изменения реальной возможности приобретать данный товар в результате изменения цены на него) и косвенного влияния в результате переключения спроса на другие товары («Компенсированное изменение цены»).

Тренировочные задания

Задание 5.1. Функция полезности индивида: $u = (Q_A + 4)(Q_B + 5)$, где Q_A, Q_B – количества двух различных благ, его бюджет: $M = 64$, а цены благ $p_A = 1$, $p_B = 1.5$. Запишите уравнение кривой безразличия, на которой находится потребитель в момент равновесия.

Задание 5.2. Функция спроса на газ имеет вид $Q^D = 3.75\, p_n - 5p_g$, а функция его предложения – $Q^S = 14 + 0.25\, p_n + 2p_g$, где p_n, p_g – соответственно цены нефти и газа. При каких ценах на данные энергоносители объемы спроса и предложения газа будут равны 20 ед.?

Задание 5.3. В условиях задания 5.2 определить на сколько процентов изменится объем продажи газа при увеличении цены нефти на 25%.

Тесты

I. Функция $u(x)$, определенная на множестве X, называется функцией полезности, соответствующей отношению предпочтения $\succeq$, если $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succeq y$. Что означает условие $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$?

1. Небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность.
2. При очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности.
3. С ростом потребления блага полезность растет.
4. Для каждого потребителя функция полезности, если она существует, определяется не однозначно.
5. С ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется.

II. Какие два товара i, j называются взаимозаменяемыми?

1. Если при снижении спроса на i-й товар спрос на j-й товар также падает.
2. Если $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$, т.е. если при возрастании цены на товар i при компенсирующем изменении дохода с одновременным падением спроса на товар i возрастет спрос на товар j.
3. Когда функция полезности остается постоянной.
4. В том случае, когда $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$.
5. В том случае, когда $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial Q}\right) x_j^*$.

III. Сформулируйте экономический смысл неравенства $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < (\frac{\partial x_i}{\partial p_j})_{comp}$.

1. Товары образуют взаимодополнительную пару (компенсируемое увеличение цены на бензин приводит к падению спроса на бензин и к падению спроса на автомобили).
2. Если спрос растет, то он растет больше при наличии компенсации, если падает – то в меньшей степени.
3. Товары *i, j* являются взаимозаменяемыми, т.е. если при возрастании цены на товар i при компенсирующем изменении дохода с одновременным падением спроса на товар i возрастет спрос на товар *j*.
4. При повышении цены на *j*-й товар найдется такой *i*-й товар потребление которого возрастет при компенсирующем изменении дохода.
5. При возрастании цены на товар *i* при компенсирующем изменении дохода с одновременным падением спроса на товар *i* возрастет спрос на товар *j*.

IV. Продолжить утверждение «В точке спроса отношение предельной полезности товара к его цене ...».

1. зависит от предельной полезности добавочного дохода.
2. есть величина постоянная.
3. зависит от дохода Q.
4. с возрастанием цены убывает.
5. с убыванием предельной полезности убывает.

V. Сформулируйте 1-й закон Госсена.

1. Точка спроса – решение задачи потребительского выбора:
$$u(x) \Rightarrow \max, \qquad px = Q, \qquad x \geq 0.$$
2. С ростом потребления блага полезность растет.
3. С ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется.
4. В точке спроса предельная норма замещения одного товара другим равна обратному отношению цен.
5. С увеличением цены на любой продукт j спрос на остальные продукты не убывает: $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \geq 0, j \neq i$.

Тема 6. Модели фирмы и монополии

Функция издержек. Выбор объемов производства при влияния налоговой ставки на деятельность фирм. Поведение фирм на конкурентных рынках. Моделирование формирования цен на товары и факторы производства в условиях действия монополий, а также потерь потребителя от монополий. Описание конкуренции фирм с помощью теории игр. Торг по Нэшу.

Предположим, что каждый производитель принимает решения о производстве и реализации продукции исходя из максимизации получаемой прибыли.

6.1. Производственные множества и их свойства

Рассмотрим вектор T размерности n, первые m компонентов которого неположительны, а последние $(n - m)$ компонентов неотрицательны. Вектор $Z = (x_1, ..., x_m)$ назовем вектором затрат, а вектор $X = (x_1, ..., x_{n-m})$ – вектором выпуска, а вектор $T = (Z, X)$ – вектором затрат-выпуска, или технологией.

Каждый производитель характеризуется некоторым множеством τ технологий, которое называется *производственным множеством.*

Производитель затрачивает один товар для выпуска другого.

Производственное множество отражает широту возможностей производителя: чем оно больше, тем шире эти возможности.

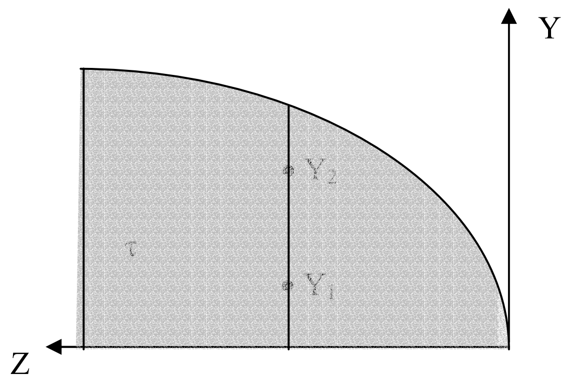


Рис. 6.1. Производственное множество

Производственное множество должно удовлетворять следующим свойствам:

1) замкнуто;

2) $\tau \cap \Omega = \{0\}$, где $\Omega = \{T : T \geq 0\}$; с экономической точки зрения это означает, что если бы в τ был вектор $T \geq 0$, $T \neq 0$, то это означало бы, что что-то можно производить, ничего не затрачивая;

3) $\tau \cap (-\tau) = \{0\}$, т.е. если $T \in \tau$, $T \neq 0$, то $-T \notin \tau$ – нельзя поменять местами затраты и выпуск (производство – необратимый процесс);

г) множество выпукло; это предположение ведет, кроме всего прочего, к уменьшению отдачи от перерабатываемых ресурсов с ростом объемов производства (к увеличению норм расхода затрат на готовую продукцию). В частности, предположение о выпуклости ведет к уменьшению производительности труда с ростом объема производства. Часто выпуклости просто бывает недостаточно и тогда требуют строгой выпуклости производственного множества.

6.2. Поверхность производственных возможностей

Рассмотрим на рис. 6.1 точки Y_1, Y_2. Затраты по этим технологиям одинаковы, а выпуск разный. Производитель, если он не лишен здравого смысла, никогда не выберет технологию *B,* раз есть более лучшая технология С.

Для каждого $Z < 0$ найдем самую высокую точку (Z, Y) в производственном множестве. Эта технология самая лучшая.

Для вектора затрат Z обозначим множество $M_Z = \{Y: (Z, Y) \in \tau\}$. Множество M_Z – это множество всех возможных выпусков при затратах Z. В этом множестве рассмотрим поверхность производственных возможностей $K_Z = \{Y \in M_Z$: если $V \in M_Z$ и $V > Y$, то $V = Y\}$, т.е. K_Z – это множество лучших выпусков при данных затратах Z. Для любого вектора затрат все наилучшие выпуски лежат на поверхности производственных возможностей.

6.3. Постановка задачи фирмы

Пусть p – вектор цен, а $T = (Z, Y)$ – технология, т.е. вектор «затраты – выпуск», то $pT = pZ + pY$ есть прибыль от использования технологии T.

Производитель выбирает технологию из своего производственного множества максимизирующую прибыль, т.е. производитель решает следующую задачу:

$$pT \Rightarrow \max,\ T \in \tau. \tag{6.1}$$

Эта аксиома резко упрощает ситуацию выбора. Так, если цены положительны, что естественно, то компонента «выпуск» решения этой задачи автоматически будет лежать на кривой производственных возможностей.

Выпуск фирмы можно охарактеризовать ПФ. Если цена единицы продукции p, а цена единицы ресурса w, то каждому вектору затрат отвечает прибыль $\Pi(x) = pF(x) - wx$. Если нет других ограничений, то приходим к задаче фирмы:

$$\Pi(x) = pF(x) - wx \Rightarrow \max, \quad x \geq 0. \tag{6.2}$$

Условия Куна – Таккера для этой задачи имеют вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = p\frac{\partial F}{\partial x} - w \leq 0\,, \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}x = (p\frac{\partial F}{\partial x} - w)x = 0\,. \tag{6.4}$$

Будем предполагать, что все затраты строго положительны, тогда точка экстремума x* удовлетворяет условиям:

$$p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x} = w\ . \tag{6.5}$$

При естественных предположениях на ПФ соотношение (6.5) дает оптимальное решение задачи фирмы. Экономический смысл соотношения (6.5): в оптимальной точке стоимость предельного продукта данного ресурса должна равняться его цене.

6.4. Функция спроса на ресурсы

При определенных условиях, наложенных на ПФ, решение задачи фирмы (6.5) единственно для всех w, p > 0. Обозначим это решение

$$x^* = x^*(p, w). \tag{6.6}$$

Эти n функций называются *функциями спроса на ресурсы при данных ценах на продукцию* и *ресурсы.*

Если сложились цены w на ресурсы и цена p на выпускаемый товар, то данный производитель определяет объем перерабатываемых ресурсов по функциям (6. 6). Зная объемы перерабатываемых ресурсов и подставляя их в производственную функцию, получим выпуск как функцию цен:

$$X^*(p, w) = F(x^*(p, w)). \tag{6.7}$$

Эта функция называется функцией *предложения продукции.*

Можно доказать следующие утверждения:

1. $\dfrac{\partial X^*}{\partial p} > 0$, т.е. с ростом цены на продукцию выпуск продукции растет (выпуск является возрастающей функцией цены на продукцию).

2. Увеличение цены выпуска приводит к увеличению спроса на некоторые ресурсы. Ресурсы для которых $\dfrac{\partial x_k^*}{\partial p} < 0$ называются малоценными (увеличение цены выпуска приводит к падению спроса на этот ресурс). Все ресурсы не могут быть малоценными.

3. $\dfrac{\partial X^*}{\partial w_j} = -\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p}$, $j = 1, 2, ..., n.$ Возрастание цены продукции приводит к повышению (понижению) спроса на определенный вид ресурсов, если и только если увеличение платы за этот ресурс приводит к сокращению (возрастанию) оптимального выпуска.

Например, увеличение платы за малоценные ресурсы ведет к увеличению выпуска продукции. Однако можно доказать наличие таких ресурсов, возрастание платы за которые приводит к уменьшению выпуска продукции (т.е. все ресурсы не могут быть малоценными – впрочем, это уже отмечалось выше).

4. $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial w_j} < 0$ для $j = 1, ..., n,$ т.е. повышение платы за ресурс, всегда приводит к сокращению спроса на этот ресурс. Кривые спроса на ресурсы-затраты всегда убывающие.

5. $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial w_k} = \dfrac{\partial x_k^*}{\partial w_j}$, для любых $k, j = 1,..., n$**,** т.е. влияние изменения цены за k-й ресурс на изменение спроса на j-й ресурс равно влиянию изменения цены за j-й ресурс на изменения спроса на k-й ресурс. По определению, k-й и j-й ресурсы называются взаимодополняемыми, если $\dfrac{\partial x_k^*}{\partial w_j} < 0$, и взаимозаменяемыми, если $\dfrac{\partial x_k^*}{\partial w_j} > 0$.

Для взаимодополняемых ресурсов повышение цены на один из них приводит к падению спроса на другой, а для взаимозаменяемых ресурсов повышение цены на один из них приводит к увеличению спроса на другой. Примеры взаимодополняемых ресурсов:

компьютеры и принтеры к ним, шифер и шиферные гвозди. Примеры взаимозаменяемых ресурсов: шифер и рубероид, арбузы и дыни.

Напомним, что в теории потребления при изучении спроса установлено, что для любого товара существует хотя бы один заменяющий его (при компенсации дохода).

Фирма на конкурентном рынке не может продавать свою продукцию по цене, отличной от рыночной, и не может покупать ресурсы, необходимые для производства, также по ценам, отличным от рыночных.

Оптимальный размер выпуска находится из следующего правила: *максимальная прибыль достигается, когда предельные доходы равны предельным издержкам.*

Оптимальный выпуск фирмы определяется соотношением (6.5).

Величина $p\dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_k}$ называется k-м предельным доходом, так что соотношение (1) говорит о равенстве предельных доходов и цен соответствующих ресурсов. Величина же w_k/p называется приведенной ценой k-го ресурса, так что соотношение (6.5) говорит равенстве предельных продуктов и приведенных цен соответствующих ресурсов.

В ситуации на рынке, когда фирма, называемая монополистом, полностью контролирует предложение определенного товара или услуги фирма может сама установить цену на продукцию, однако сформулированное выше правило (см. 1-й абзац) нахождения оптимального размера фирмы – выпуска продукции остается без изменения. В этом случае, прибыль $П(Y) = R(Y) – I(Y)$, где $R(Y)$ – доход от реализации Y единиц продукции, а $I(Y)$ – издержки при выпуске такого количества продукции. Для объема продукции, максимизирующего прибыль, имеем $P'(Y) = 0$, т.е. $R'(Y) = I'(Y)$, но это и означает равенство предельного дохода и предельных издержек. Оптимальный выпуск фирмы так же определяется соотношением (6.5).

Однако, если на конкурентном рынке предельный доход определялся через цену продукции и объем производства, а предельные издержки – через цены и объем закупаемых ресурсов, но цены не зависели от фирмы, то при монопольном положении фирмы на рынке цену может назначать фирма, а затем определяется объем производства, максимизирующий прибыль.

Для фирмы, действующей частично в условиях конкурентного, частично в условиях монопольного рынка, можно вывести несложное правило установления цены, максимизирующей прибыль. Это правило называется *правилом «большого пальца»*. Данное правило ценообразования $p = PI(1 + 1/E)$ представляет собой правило ценообразования для любой фирмы, если учитывать, что $E = \dfrac{dY}{Y} / \dfrac{\partial p}{p}$ есть эластичность спроса по цене для продукции фирмы, а не всего рынка.

6.5. Налоги и действия потребителей при взимании налогов

Налог – обязательные платежи, взимаемые государством с физических и юридических лиц для финансирования государственных расходов. Какой должна быть величина налога и от чего должен зависеть налог?

Есть два полярных взгляда на принципы налогообложения.

1) *Принцип полученных благ.* Этот принцип утверждает, что потребители и производители должны приобретать товары и услуги, предоставляемые государством, таким же образом, как и другие (обычные) товары. Таким образом, те, кто получает большую выгоду от этих товаров, и должны платить налоги, идущие на финансирование производства

этих товаров и услуг. Реальное налогообложение частично учитывает этот принцип. Например, в России есть транспортный налог, который взимается только с владельцев автомобилей. Этот налог идет на поддержание дорожной инфраструктуры. Однако этот принцип очень трудно применять на практике. Главная трудность в том, что надо знать весьма точно структуру потребления, расходов членов общества.

2) *Принцип, основанный на концепции платежеспособности.* Гражданин отчисляет государству часть своего дохода, обычно месячного или годового. Некоторым теоретическим основанием для этого служит принцип «равенства жертв». Для выяснения этого принципа рассмотрим потребителей с примерно одинаковой функцией полезности $u(x)$. Пусть цены p фиксированы, а доход Q у индивидов данной группы может быть различным. Напомним, что при естественных предположениях на функцию u, которые считаем выполненными, возникает функция спроса $x = x(p,Q)$. При фиксированных ценах функция спроса есть функция только Q и в итоге максимальное значение полезности $u^* = u(x^*) = u^*(Q)$ тоже есть функция Q. Таким образом, принцип «равенства жертв» требует, чтобы налог $T(Q)$, уплачиваемый с дохода Q, удовлетворял уравнению $u^*(Q) - u^*(Q - T(Q)) = const$, где $const$ – некоторая постоянная величина, не зависящая от Q и характерная для данной социальной группы (каждый член этой социальной группы должен «жертвовать» государству одно и то же относительно функции полезности, присущей данной социальной группе). Покажем, что $T(Q)$ возрастает с увеличением Q, что представляется весьма естественным.

Продифференцируем приведенное выше равенство по Q:

$$\frac{du^*(Q)}{dQ} - \frac{du^*(Q-T(Q))}{d(Q-T(Q))}\left(1-\frac{dT(Q)}{dQ}\right)=0.$$

С ростом Q предельная полезность убывает. Следовательно,

$$\frac{du^*(Q)}{dQ} < \frac{du^*(Q-T(Q))}{d(Q-T(Q))} \text{ и } 1-\frac{dT(Q)}{dQ}<1\text{ , т.е. } \frac{dT(Q)}{dQ}>0.$$

Итак, доказано, что принцип «равенства жертв» влечет увеличение налога при увеличении дохода.

6.6. Налоги и действия производителей при взимании налогов

Напомним основные соглашения для данного случая. Производитель характеризуется производственной функцией $X = F(Z)$, отражающей связь «затраты Z – выпуск X» и удовлетворяющей сформулированным ранее предположениям о производственных функциях.

Налоги могут быть разными. Рассмотрим два их вида.

При налоге с прибыли при ставке t производитель отчисляет государству t-ю часть прибыли. Получаем задачу:

$$(pF(Z) - wZ)(1 - t) \Rightarrow \max, \quad Z \geq 0.$$

По крайней мере в теоретическом плане этот налог не влияет на положение точки максимума и тем самым на оптимальный размер производства.

Акцизный налог – налог с продаж – характеризуется ставкой t – суммой, которую государство получает за каждую проданную единицу продукции. Поэтому, желая максимизировать прибыль, производитель решает задачу

$$(p - t)F(Z) - wZ \Rightarrow \max, \quad Z \geq 0.$$

Для упрощения никаких других ограничений нет. Но тогда точка максимума характеризуется соотношением $(p - t)\ \dfrac{\partial F(Z)}{\partial z_k} = w_k$.

Откуда можно получить, что точка максимума будет при меньших значениях Z и при меньшем объеме производства.

6.7. Поведение фирм на конкурентных рынках

Рассмотрим модель олигополии на примере дуополии, производящих одну и ту же продукцию в соответствии со своей производственной функцией. Цена продукции зависит от обоих выпусков $p = p(X_1, X_2)$, причем при возрастании выпусков цена падает:

Цена ресурса также зависит от объемов его покупки x^1, x^2 первой и второй фирмами

$$w_j = w_j\,(x_j^1, x_j^2)\ j = 1, 2, ..., n, \tag{6.8}$$

причем цены возрастают при увеличении спроса:

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} > 0\,,\ \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2} > 0\,.$$

Первая фирма решает задачу максимизировать свою прибыль:

$$П^1 = p(X_1, X_2)X_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j^1, w_j^2)x_j^1\ \Rightarrow \max$$

при условии $X_1 = F_1(x^1)$,

Вторая фирма

$$П^2 = p(X_1, X_2)X_2 - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j^1, w_j^2)x_j^2\ \Rightarrow \max$$

при условии $X_2 = F_2(x^2)$.

Решить эти задачи можно используя метод множителей Лагранжа.

Ниже будут изучены различные варианты решения задачи конкуренции в упрощенной постановке, в которой не рассматривается конкуренция на рынке ресурсов.

Издержки фирм являются одинаковыми линейными функциями выпуска, а цена продукции – линейная функция суммарного выпуска фирм, тогда можно получить для каждой фирмы выпуск максимизирующий прибыль

$$X_1^* = \frac{X_0 - X_2}{2 + \dfrac{dX_2}{dX_1}}\,, \qquad X_2^* = \frac{X_0 - X_1}{2 + \dfrac{dX_1}{dX_2}}\,,$$

где X_0 – некоторая константа.

6.8. Алгоритм Курно

Предположим, что каждая фирма принимает решение считать объем выпуска своего конкурента постоянным в течение заданного периода, т.е. $\frac{dX_2}{dX_1}=0$, $\frac{dX_1}{dX_2}=0$, тогда получиим $X_1^*=\frac{X_0-X_2}{2}$, $X_2^*=\frac{X_0-X_1}{2}$. На рис. 6.2 изображены множества оптимального выпуска одной фирмы при заданном фиксированном выпуске другой фирмы. Алгоритма Курно состоит в следующем: пусть первая фирма выбирает какой либо выпуск $X_1^1<X_0$, тогда вторая фирма действует так, как если бы первая все время выбирала X_1^1, т.е. $X_2^1=\frac{X_0-X_1^1}{2}$, далее первая фирма выбирает $X_1^2=\frac{X_0-X_2^1}{2}$ и т.д. обе фирмы действуют аналогично. Сходимость такой процедуры к точке (X_1^K, X_2^K) видна из рис. 6.2. Точка (X_1^K, X_2^K) назвается точкой *равновесия Курно*. Ее координаты $X_1^K=\frac{X_0}{3}$, $X_2^K=\frac{X_0}{3}$. Траектория движения к этой точке на рис. 6.2 изображена стрелками.

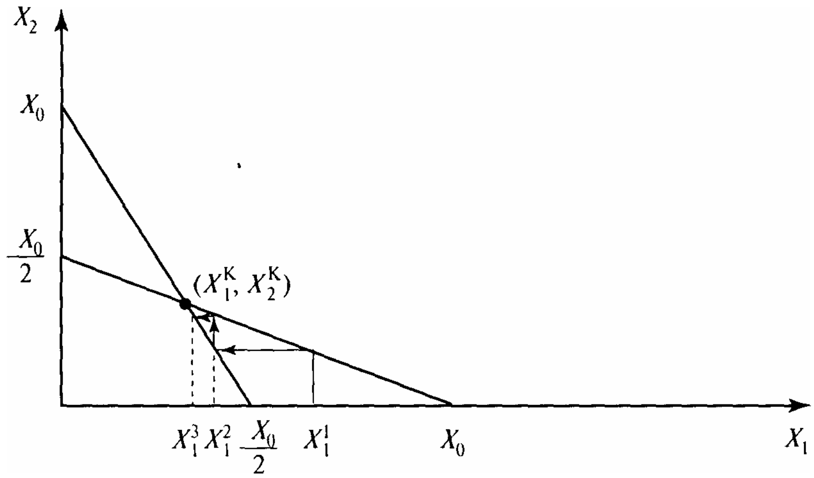


Рис. 6.2

6.9. Стратегия Стакельберга

Допустим, что первая фирма раскроет свою стратегию выпуска X_1, тогда вторая фирма будет действовать по Курно оптимально, т.е. $X_2^*=\frac{X_0-X_1}{2}$, откуда найдем $\frac{dX_2}{dX_1}=-\frac{1}{2}$ и тогда $X_1^*=\frac{X_0-X_2}{2-\frac{1}{2}}$ будет выпуск первой фирмы, максимизирующий ее прибыль.

В конечном счете результаты будут зависеть от действительны реакции второй фирмы. Если вторая фирма в самом деле будет действовать по Курно, то получим точку *равновесия Стакельберга:* $X_1^S = \dfrac{X_0}{2}$, $X_2^S = \dfrac{X_0}{4}$.

Если вторая фирма так же, как первая, будет действовать по Стакельбергу, т.е. исходя из того, что первая действует по Курно, то получим ситуацию, которая носит название *неравновесия Стакельберга.* В этом случае стратегии симметричны, поэтому при $X_1^* = X_2^*$ одинаковых функциях издержек $X_1^* = X_2^*$, и, следовательно, $X_1^S = X_2^S = \dfrac{2X_0}{5}$.

Пусть издержки фирм являются одинаковые линейными функциями выпуска $C_i = cX_i + d$, $i = 1,2$, а цена продукции – линейная функция общего выпуска $p(X) = a - bX$, тогда легко вычислить во всех случаях поведения фирм прибыли обеих фирм, общий выпуск и цену.

Состояние	X_1	X_2	X_1+X_2	$П_1$	$П_2$	P
Точка Курно	$X_0/3$	$X_0/3$	$2X_0/3$	$bX_0^2/9 - d$	$bX_0^2/9 - d$	$a - 2bX_0/3$
Точка Стакельберга	$X_0/2$	$X_0/4$	$3X_0/4$	$bX_0^2/8 - d$	$bX_0^2/16 - 2d$	$a - 3bX_0/4$
Неравновесие Стакельберга	$2X_0/5$	$2X_0/5$	$4X_0/5$	$2bX_0^2/25 - d$	$2bX_0^2/25 - d$	$a - 4bX_0/5$
Монополия	-	-	$X_0/2$	$bX_0^2/4 - 2d$		$a - bX_0/2$

Пусть теперь фирмы объединились (образовали монополию), тогда максимум прибыли max $(bX(X - X_0) - 2d$ достигается в точке $X = X_0/2$, при этом цена $p = a - bX_0/2$. В этом случае выпуск гораздо меньше, а цена гораздо выше чем в точках Курно и Стакельберга. Это самое худшее для потребителя.

Выводы

1. Каждый производитель характеризуется некоторым множеством технологий (*производственным множеством*). Производственное множество – способ компактной записи вариантов возможных планов предприятия (фирмы) в виде совокупности векторов «затрат – выпуск» – точек многомерного пространства.

2. Каждый производитель принимает решения о производстве и реализации продукции исходя из максимизации получаемой прибыли выбирая технологию из своего производственного множества.

3. При естественных предположениях на производственную функцию точка в которой достигается максимум прибыли имеет следующий экономический смысл: в оптимальной точке стоимость предельного продукта данного ресурса должна равняться его цене.

4. Эта точка определяет n функций (*функции спроса на ресурсы при данных ценах на продукцию и ресурсы*). Зная объемы перерабатываемых ресурсов и подставляя их в производственную функцию, получим выпуск как функцию цен. Эта функция называется функцией *предложения продукции*.

5. Фирма на конкурентном рынке не может продавать свою продукцию по цене, отличной от рыночной, и не может покупать необходимые ресурсы, также по ценам, отличным от рыночных. В ситуации на рынке, когда фирма – монополист, полностью контролирует предложение товара или услуги фирма может сама установить цену на продукцию, однако правило нахождения оптимального размера выпуска продукции фирмой остается без изменения. Для фирмы, действующей частично в условиях конкурентного, частично в условиях монопольного рынка, можно вывести несложное правило установления цены, максимизирующей прибыль.

6. Налог – обязательные платежи, взимаемые государством с физических и юридических лиц для финансирования государственных расходов. Есть два полярных взгляда на принципы налогообложения: принцип полученных благ и принцип, основанный на концепции платежеспособности.

7. *Алгоритм Курно – модель дуополии*, где *фирмы* конкурируют друг с другом, производя однородный товар и зная общую кривую рыночного спроса. Обе фирмы должны решить, сколько продукции выпускать, и обе принимают свои решения в одно и то же время. Конечная цена зависит от совокупного объема производства обеих фирм. Главная особенность модели: каждая фирма принимает решения, считая объем выпуска своего конкурента постоянным в течение заданного периода.

8. Равновесие Курно: каждая фирма принимает решения, которые дают ей наибольшие прибыли при данных действиях своих конкурентов. График, отражающий объемы производства фирмы в зависимости от предполагаемых объемов производства ее конкурентов, называется кривой реакции. Равновесный уровень объема производства находится на пересечении кривых реакции обеих фирм. В теории игр такая ситуация называется равновесием Нэша. В конечном счете прибыли, получаемые каждой фирмой, выше, чем если бы они были при идеальной конкуренции, но они ниже, чем если бы фирмы договорились друг с другом. Но подобные договоренности обычно осуждаются и кроме того, фирмы могут не верить друг другу: если контрагент в нарушение договоренности снизит цену по сравнению с условленной, то он увеличит сбыт и одержит победу в конкуренции.

9. *Стратегия Стэкельберга – модель дуополии*, в которой учитывается возможная вероятная реакция конкурентов на принимаемые решения об объеме выпуска, причем одна или обе фирмы считают, что конкурент будет вести себя как дуополист Курно. Если, например, фирма А предполагает, что конкурент будет реагировать соответственно кривой реакции Курно, то результаты для обеих фирм будут зависеть от поведения фирмы В. Тогда А получит большую прибыль, а В – меньшую, чем они получили бы при равновесии Курно. Но если и фирма В будет действовать согласно кривой реакции Стэкельберга, то есть если каждая фирма неправильно предположит, что ее конкурент использует допущение Курно, то получаем равновесие Стэкельберга. В этом случае обе фирмы получат меньшую прибыль, чем при равновесии Курно.

Тренировочные задания

Задание 6.1. ПФ фирмы $Y = (KL)^{0.5}$. Найти отношение объемов ОПФ к объему трудовых ресурсов в оптимальном режиме, если цены ресурсов w_K, w_L.

Задание 6.2. Технология конкурентной фирмы соответствует ПФ $Y = (KL)^{0.5}$. Цена на продукцию фирмы равна 10 ед. Выведите уравнение кривой спроса фирмы на труд при K=100 ед.

Задание 6.3. Фирма является совершенным конкурентом на рынке благ и на рынке труда. При заданном объеме капитала ее технология определяется производственной функцией $240L - 5L^2$. Сколько труда наймет фирма при $P = 2$ и $w_L = 120$?

Тесты

I. Сформулируйте оптимальную задачу производителя при акцизном налоге (налоге с продаж).

1. $pT \Rightarrow \max$, $T \in \tau$.
2. $\Pi(x) = pF(x) - wx \Rightarrow \max$, $x \geq 0$.
3. $\Pi(Y) = R(Y) - I(Y) \Rightarrow \max$, $Y \geq 0$.
4. $(p - t)F(Z) - wZ \Rightarrow \max$, $Z \geq 0$.
5. $(pF(Z) - wZ)(1 - t) \Rightarrow \max$, $Z \geq 0$.

II. Пусть вектор $Z= (x_1, ..., x_m)$ – вектором затрат, а вектор $Y = (x_1, ..., x_m)$ – вектором выпуска. Вектор $T = (Z, Y)$ – вектором затрат-выпуска, или технологией. Каждый производитель характеризуется некоторым производственным множеством τ. Записать математически утверждение «производство – необратимый процесс»

1. Если вектор T сколь угодно точно приближается векторами из τ, то $T \in \tau$.
2. $\tau \cap \Omega = \{0\}$, где $\Omega = \{T : T \geq 0\}$.
3. Если $T_1, T_2 \in \tau$, то для любого числа $0 \leq \alpha \leq 1$ выполняется условие $\alpha T_1 + (1-\alpha) T_2 \in \tau$.
4. $\tau \cap (-\tau) = \{0\}$, т.е. если $T \in \tau$, $T \neq 0$, то $-T \notin \tau$ – нельзя поменять местами затраты и выпуск
5. Для вектора затрат Z обозначим множество $M_Z = \{Y: (Z, У) \in \tau\}$ – множество всех возможных выпусков при затратах Z. В этом множестве рассмотрим поверхность производственных возможностей $K_Z = \{Y \in M_Z$: если $V \in M_Z$ и $V > Y$, то $V = Y\}$, т.е. K_Z – множество лучших выпусков при данных затратах Z. Для любого вектора затрат все наилучшие выпуски лежат на поверхности производственных возможностей.

III. Если цена единицы ресурса $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$, а $x_j^* = x_j^*(p,w)$, $(j = 1, 2, ..., n)$ – функции *спроса на ресурсы при данных ценах на продукцию* и *ресурсы*. Что означает неравенство $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_j} < 0$?

1. Увеличение цены выпуска приводит к увеличению спроса на некоторые ресурсы.
2. Возрастание цены продукции приводит к понижению спроса на определенный вид ресурсов, если и только если увеличение платы за этот ресурс приводит к возрастанию оптимального выпуска.
3. Повышение платы за ресурс, всегда приводит к сокращению спроса на этот ресурс. Кривые спроса на ресурсы-затраты всегда убывающие.
4. Возрастание цены продукции приводит к повышению спроса на определенный вид ресурсов, если и только если увеличение платы за этот ресурс приводит к сокращению оптимального выпуска.
5. Фирма на конкурентном рынке не может покупать ресурсы, необходимые для производства по ценам, отличным от рыночных.

IV. Что такое ситуацию, которая носит название *неравновесия Стакельберга?*

1. Если вторая фирма так же, как первая, будет действовать исходя из того, что первая действует по Курно.
2. Каждая фирма принимает решение считать объем выпуска своего конкурента постоянным в течение заданного периода.

3. Издержки фирм являются одинаковыми линейными функциями выпуска, а цена продукции – линейная функция суммарного выпуска фирм.

4. Первая фирма выбирает какой либо выпуск $X_1^1 < X_0$, тогда вторая фирма действует так, как если бы первая все время выбирала X_1^1, т.е. $X_2^1 = \frac{X_0 - X_1^1}{2}$, далее первая фирма выбирает $X_1^2 = \frac{X_0 - X_2^1}{2}$ и т. д. обе фирмы действуют аналогично.

5. Первая фирма раскрывает свою стратегию выпуска X_1, тогда вторая фирма будет действовать по Курно оптимально, т.е. $X_2^* = \frac{X_0 - X_1}{2}$, и тогда $X_1^* = \frac{X_0 - X_2^*}{2 - \frac{1}{2}}$ будет выпуск первой фирмы, максимизирующий ее прибыль.

V. Сформулируйте экономический смысл соотношения $p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x} = w$.

1. Увеличение цены выпуска приводит к увеличению спроса на некоторые ресурсы.
2. С ростом цены на продукцию выпуск продукции растет (выпуск является возрастающей функцией цены на продукцию).
3. В оптимальной точке стоимость предельного продукта данного ресурса должна равняться его цене.
4. Повышение платы за ресурс, всегда приводит к сокращению спроса на этот ресурс. Кривые спроса на ресурсы-затраты всегда убывающие.
5. Возрастание цены продукции приводит к повышению спроса на определенный вид ресурсов, если увеличение платы за этот ресурс приводит к сокращению оптимального выпуска.

Заключение

Экономика стала наукой после того, как ее творцы обосновали, что основным источником богатства нации является не количество имеющихся у нее природных ресурсов и не активный торговый баланс страны, а эффективная форма организации общественного хозяйства.

Более конкретно содержание экономической теории и ее структуру можно представить в виде табл. 1.

Содержание и структура экономической теории табл. 1

№ п/п	Вопросы экономической теории	Разделы экономической науки
	Макроэкономика	
1	Что такое деньги и какова их роль?	Теория денег
2	Что такое уровень цен и чем определяется его динамика?	Теория инфляции
3	Чем определяется уровень занятости?	Теория занятости
4	Чем определяется экономическая конъюнктура?	Теория циклов
5	Как осуществляется экономический рост?	Теория роста
6	Какое воздействие на экономику оказывает государство?	Теория экономической политики
7	Какое воздействие на национальную экономику оказывает заграница?	Теория внешнеэкономических отношений
	Микроэкономика	
8	Почему, какие и в каком количестве спрашиваются блага на рынке?	Теория спроса
9	Чем определяется ассортимент производимых благ и от чего зависит способ их изготовления?	Теория производства
10	Как формируются рыночные цены?	Теории конкуренции и ОЭР
11	Как распределяется национальный доход?	Теория факторного распределения

Во-первых, макроэкономика и микроэкономика различаются аспектом и методикой исследования национального хозяйства. Макроэкономический анализ направлен на выявление результатов функционирования национальной экономики в целом. В макроэкономике исследуются факторы, определяющие НД, уровень безработицы, темп инфляции, состояние государственного бюджета и платежного баланса страны, темпы экономического роста.

Микроэкономический анализ посвящен изучению поведения отдельных экономических субъектов (домашних хозяйств, фирм), выявлению условий, обеспечивающих совместимость их хозяйственных планов, и описанию механизма согласования совокупности индивидуальных целей субъектов национальной экономики. В современной экономике это согласование в значительной мере осуществляется посредством рыночного ценообразования на блага и факторы производства. Поэтому механизм рыночного ценообразования находится в центре микроэкономического анализа.

Во-вторых, макроэкономический анализ исходит из существования в стране «кредитных денег», количество которых регулируется государством (Центральным банком).

Поэтому в макроэкономике исследуются наряду с реальным монетарный сектор и взаимодействие обоих секторов. Микроэкономика исследует меновое хозяйство, в котором используются «товарные деньги», т. е. функции денег выполняет одно из производимых фирмами благ (например, золото). Это приводит к тому, что в микроэкономике рассматривается лишь реальный сектор национального хозяйства.

Несмотря на относительную самостоятельность микроэкономики и макроэкономики, их выводы о сущности экономических явлений и закономерностей часто дополняют друг друга.

Макроэкономический взгляд на народное хозяйство различает в нем лишь четыре экономических субъекта: сектор домашних хозяйств, предпринимательский сектор, государственный сектор и заграницу.

Сектор домашних хозяйств включает все частные хозяйственные ячейки внутри страны, деятельность которых направлена на удовлетворение собственных потребностей. Домашние хозяйства являются собственниками всех факторов производства, находящихся в частной собственности. За счет их продажи или предоставления в аренду домашние хозяйства получают свой доход, который распределяют между текущим потреблением и сбережением.

Предпринимательский сектор представляет собой совокупность всех фирм, зарегистрированных внутри страны. Как известно из микроэкономики, фирма – это организация, созданная для производства и реализации благ. Ее деятельность сводится к закупке факторов производства, продаже произведенной продукции и услуг, поддержанию и развитию производственной базы.

Государственный сектор – все государственные институты и учреждения. Государство занимается производством общественных благ, которые в отличие от благ, производимых в предпринимательском секторе, достаются потребителю бесплатно. К числу важнейших благ такого рода относятся безопасность, достижения фундаментальной науки, услуги государственной социальной и производственной инфраструктур.

Результаты деятельности государства как производителя общественных благ проявляются в увеличении продуктивности предпринимательского сектора и снижении затрат на потребление домашних хозяйств.

Специфика конечных результатов хозяйственной деятельности государства приводит к тому, что в отличие от предпринимательского сектора государство не преследует цель максимизации прибыли.

Для производства общественных благ государство закупает в качестве средств производства блага, произведенные в предпринимательском секторе.

Источником покрытия государственных расходов служат налоги, взимаемые с домашних хозяйств и предпринимателей.

В расходной части государственного бюджета значительный удельный вес имеют выплаты домашним хозяйствам (государственные пенсии и пособия) и предпринимательскому сектору (дотации и субвенции).

Кроме текущих расходов на производство общественных благ государство, как правило, осуществляет инвестиции в реальный капитал.

Одной из важнейших функций государства в лице его Центрального банка является создание (предложение) денег, необходимых для удовлетворения потребностей домашних хозяйств, предпринимателей и самого государства.

Сектор заграница включает в себя экономических субъектов, имеющих постоянное местонахождение за пределами данной страны, а также иностранные государственные институты. Воздействие заграницы на отечественную экономику осуществляется через взаимный обмен товарами, услугами, капиталом и национальными валютами.

При макроэкономическом исследовании агрегированию подвергаются не только физические и юридические лица, но и характер их поведения в хозяйственной жизни.

Макроэкономическое агрегирование распространяется и на рынки. Все множество рынков благ, являющееся предметом микроэкономического анализа, в макроэкономике агрегируется в единый рынок благ, на котором покупается и продается только один вид благ. Это благо может использоваться и как предмет потребления, и в качестве средства производства. Предметом изучения становятся абсолютный уровень цен и его изменение.

Из рынков факторов производства в краткосрочных макроэкономических моделях, как правило, представлен лишь рынок труда, на котором покупается и продается один вид труда. В моделях экономического роста кроме рынка труда присутствует и рынок капитала.

Рынок ценных бумаг в краткосрочных макроэкономических моделях представляет рынок государственных облигаций с одним видом краткосрочной облигации.

В качестве макроэкономического инструмента анализа используется еще один рынок, отсутствовавший в микроэкономике, – денежный рынок. На этом рынке взаимодействуют спрос и предложение национальной валюты.

Макроэкономическое агрегирование не сводится к суммированию свойств агрегируемых элементов, так как экономика, являясь сложной органической системой. Последствия определенного действия микроэкономического субъекта не совпадают с последствиями такого же действия макроэкономического субъекта как агрегата микроэкономических субъектов. Так, если во время депрессии фирма воздерживается от реальных инвестиций, то это способствует сохранению ее капитала. Но если все фирмы поступают таким образом, то совокупный капитал и капитал каждой фирмы в отдельности обесценятся. Очевидными издержками макроэкономического агрегирования являются частичная потеря информации и повышение уровня абстракции экономических исследований. В то же время благодаря агрегированию облегчается выявление сущности сложнейших народнохозяйственных процессов. Чтобы агрегированные показатели не потеряли экономический смысл и научную ценность, необходимо соблюдать определенные правила агрегирования, которые излагаются в специальном разделе эконометрики.

Вследствие отмеченной выше специфики государственного участия в народном хозяйстве между государством и частным сектором кроме рыночных существуют и нерыночные экономические связи.

Модель исследуемого объекта включает в себя две группы элементов: известные к моменту построения модели параметры и неизвестные параметры, которые надо определить из анализа (решения) модели. Первые также называют экзогенными (определяемые вне модели), а вторые – эндогенными (определяемые внутри модели) параметрами. Построить модель функционирования некоторой системы – значит отыскать или постулировать оператор (функцию), связывающий неизвестные и известные параметры модели.

В макроэкономических моделях в качестве экзогенных параметров задаются технология производства в виде ПФ и характер поведения экономических субъектов на каждом из рынков в виде их функций спроса и предложения. В качестве эндогенных, получаемых из решения модели показателей выступают величина реального НД, уровень занятости, ставка реальной зарплаты, реальная ставка процента и уровень цен. Особый интерес представляет такой вектор эндогенных величин, при котором экономика оказывается в состоянии общего экономического равновесия (равенство между спросом и предложением).

Достижение общего экономического равновесия не означает, что теперь каждый участник рыночного хозяйства доволен своим положением; равновесие просто констатирует, что за счет изменения объема и структуры покупок или продаж никто не сможет улучшить свое благосостояние в сложившихся условиях.

Общее экономическое равновесие не является типичным состоянием рыночной экономики, так как разрабатываемые независимо друг от друга планы суверенных субъектов лишь случайно могут оказаться взаимно согласованными. Однако поведение субъектов в рыночном хозяйстве определяется их стремлением к достижению равновесия.

Важно выявить, является ли экономическое равновесие устойчивым или неустойчивым. Если в ответ на экзогенный импульс, нарушающий равновесие, система сама под влиянием внутренних сил возвращается в равновесное состояние, то равновесие называется устойчивым в противном случае экономическое равновесие называется неустойчивым.

В зависимости от того, в какой мере при исследовании экономических явлений учитывается время, различают три вида анализа: статический, сравнительной статики и динамический.

Общая логика макроэкономического анализа такова: сперва определяются условия равновесия на каждом из рынков в отдельности и лишь затем выводятся условия одновременного достижения равновесия на всех рынках. При этом используется *закон Вальраса,* который гласит: в народном хозяйстве, состоящем из n взаимосвязанных рынков, на n-м рынке всегда будет равновесие, если оно достигнуто на всех остальных $n - 1$ рынках.

Ответы и решения тренировочных заданий и тестов

Тема 1. Производственные функции (ПФ)

Тренировочные задания.

1.1. Для ПФ (1.3) согласно (1.4) имеем, что предельная производительность труда пропорциональна с коэффициентом α средней производительности труда $\frac{X}{L}$, а предельная фондоотдача – средней фондоотдаче $\frac{X}{K}$ с коэффициентом $1 - \alpha$

1.2. Средняя эффективность экономики страны $E = \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}}\right)^{1-\alpha}$, где $\alpha = \frac{\alpha_K}{\alpha_K + \alpha_L}$ и $1-\alpha = \frac{\alpha_L}{\alpha_K + \alpha_L}$. Подставив исходные данные задачи, получим:

$$\alpha = \frac{\alpha_K}{\alpha_K + \alpha_L} = \frac{0{,}404}{0{,}404 + 0{,}803} = 0{,}33,\ 1-\alpha = \frac{\alpha_L}{\alpha_K + \alpha_L} = \frac{0{,}803}{0{,}404 + 0{,}803} = 0{,}67,$$

$$\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}} = \frac{2{,}82}{2{,}88} = 0{,}98,\ \frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}} = \frac{2{,}82}{1{,}93} = 1{,}46,\ E = \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}}\right)^{0{,}33} \cdot \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}}\right)^{0{,}67} = 0{,}98^{0{,}33} \cdot 1{,}46^{0{,}67} \approx 1{,}28$$

$$M = \frac{\widetilde{X}}{E} = \frac{2{,}82}{1{,}28} \approx 2{,}21.$$

Таким образом, ВВ продукции страны за указанный период вырос в 2,825 раза. В том числе и за счет роста масштаба производства в 2,21 раза.

1.3. По формуле (1.20) норма замещения труда фондами

$S_K = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}$ = $(1 - \alpha)\ K/(\alpha L)$, а по формуле (1.21) норма замещения фондов трудом $S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}$ = $\alpha L/((1 - \alpha)K)$.

Тесты

I. 3; **II**. 2; **III**. 4; **IV**. 5; **V.** 2.

Тема 2. Модели макроэкомической динамики

Тренировочные задания

2.1. В модели Солоу динамическое равновесие будет тогда, когда темпы прироста НД и труда совпадают. Поэтому, в условиях задачи равновесный темп роста равен 1.03. В исходном периоде $Y= (640 \cdot 10)^{0.5} = 80$.

В первом периоде L = 10.3; $K = 640+0.5 \cdot 80 = 680$. Тогда $Y_1 = (680 \cdot 10.3)^{0.5} = 83.7$; т. е. темп роста равен 83.7/80 = 1.046. По мере приближения к динамическому равновесию этот темп роста будет снижаться до 1.03.

2.2. Из условия равновесного роста по Солоу следует 0.5/0.03 = K/Y. Тогда $Y_0 = (10 \cdot 16.67\ Y_0)^{0.5} \Rightarrow (Y_0)^2 = 166.7\ Y_0 \Rightarrow Y_0 = 166.7$.

Для производства такого объема национального дохода при заданной технологии необходим капитал в размере

$K_0 = (Y_0)^2 / L_0 = 166.7^2 / 10 = 2777.8$.

2.3. Из $K(t) = k^* L_0 e^{\lambda t}$ получим $\frac{dK}{dt} = \frac{dk^*}{dt} L_0 e^{\lambda t} + \lambda k^* L_0 e^{\lambda t}$. Приращение капитала обеспечивается инвестициями $\frac{dK}{dt} = I$, которые в условиях равновесного роста должны равняться объему сбережения $I = S_y Y$. Из этих условий $\frac{dk^*}{dt} = S_y y - \lambda k^*$. Для равновесного роста необходимо соблюдение равенства: $0.2y - \lambda k^* = 0$. Так как $Y = (KL)^{0.5} \Rightarrow K = Y^2/L$, то $k^* = Y^2/L^2 = y^2$. Тогда условие задачи принимает вид $0.2\,y - \lambda\,y^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0.2/y$. Поскольку $y_0 = (16 \cdot 256)^{0.5}/16 = 4$, то для сохранения такой производительности труда необходим прирост трудовых ресурсов в размере $\lambda = 0.2/4 = 0.05 = 5\%$. В этом случае в заданных условиях будет равновесный 5%-ный прирост НД.

Тесты

I. 4; **II**. 4; **III**. 3; **IV**. 4; **V**. 1.

Тема 3. Модели межотраслевого баланса

Тренировочные задания

3.1. Характеристический многочлен матрицы A будет

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0.1a - \lambda & 0.2a & 0 \\ 0.2a & 0.1a - \lambda & 0 \\ 0.7a & 0.6a & 0.9a - \lambda \end{vmatrix} = (0.9a - \lambda)\left((0.1a - \lambda)^2 - 0.04a^2\right) = 0$$

Корни этого уравнения (собственные значения): $\lambda = 0.9a$, $\lambda = 0.3a$, $\lambda = -0.1a$.

Для продуктивности A согласно теореме необходимо и достаточно, чтобы было $0.9a < 1$, т.е. $a < 10/9$.

3.2. Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Откуда $\lambda = 3$ – единственное собственное значение матрицы A. Система уравнений для определения собственных векторов сводится к одному уравнению: $x_1 + x_2 = 0$ и собственный вектор $X = (u, -u, v)$.

3.3. Предположим, что $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$, а $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Для нахождения требуемого вектора валового выпуска необходимо найти неотрицательное решение матричного уравнения

$$x - Ax = y, \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Выполнив действия с матрицами получим

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{2}{3}x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 = 1, \\ x_2 - \dfrac{1}{4}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

Откуда: $x_1 = 8$, $x_2 = 5$.

Тесты.

I. 4; **II**. 2; **III**. 4; **IV**. 3; **V**. 4.

Тема 4. Классическая модель рыночной экономики

***Тренировочные задания*.**

4.1. Определим функцию сбережения: $S = Y - 50 - 0.5Y = -50 + 0.5Y$. Из условия равновесия на рынке благ найдем ставку процента: $0.5Y - 50 = 200 - 25r \Rightarrow r = 10 - 0.02Y$. Тогда условие равновесия на рынке денег при P=1.5 имеет вид $M/1.5 = 0.1Y + 24 - 2(10 - 0.02Y)$, из которого следует $M = 6 + 0.21Y$.

4.2. 1. Н.; 2. В.; 3. Н.; 4. В.; 5. Н.

4.3. В соответствии с классической концепцией объем спроса на труд определяется условием максимизации прибыли: $dY/dL = w \Rightarrow w = 1/(L)^{0.5} \Rightarrow L^D = 1/w^2$.

Тесты.

I. 2; **II**. 1; **III**. 2; **IV**. 2; **V**. 4.

5. Модели поведения потребителей

Тренировочные задания.

5.1. Потребитель будет в состоянии равновесия, если $\dfrac{\partial u}{\partial Q_A} / P_A = \dfrac{\partial u}{\partial Q_B} / P_B \Rightarrow$ $\dfrac{Q_A + 5}{1} = \dfrac{Q_B + 4}{1.5} \Rightarrow Q_A = 1.5Q_B + 3.5$. При заданном бюджете потребитель приобретет $64 = 1.5Q_B + 3.5 + 1.5\,Q_B \Rightarrow Q_B = 20.17$; $Q_A = 33.75$. В этом случае функция полезности примет значение $u = 950.2$, а уравнение кривой безразличия, на которой оказался потребитель имеет вид $(Q_A + 4)(Q_B + 5) = 950.2$.

5.2. Газа будет продано 20 ед. при ценах $3.75P_n - 5P_g = 20$; $14 + 2P_g + 0.25P_n = 20 \Rightarrow P_n = 8$; $P_g = 2$.

5.3. Если цена нефти возрастет до 10 ден. Ед., то равновесие на рынке газа будет при $3.75 \cdot 10 - 5P_g = 14 + 2P_g + 0.25 \cdot 10 \Rightarrow P_g = 3$; $Q_g = 22.5$, т.е. объем продажи газа возрастет на 12.5%.

Тесты.

I. 3; **II**. 2; **III**. 2; **IV**. 2; **V**. 3.

Тема 6. Модели фирмы и монополии

Тренировочные задания.

6.1. Имеем уравнения $p\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} = w_K$ и $p\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L} = w_L$ или $0.5(L/K)^{0.5} = w_K/p$, $0.5(K/L)^{0.5} = w_L/p$. Откуда $K/L = w_L / w_K$.

6.2. При использовании фирмой 100 ед. капитала условие максимизации прибыли имеет вид $50/L^{0.5} = w_L \Rightarrow LD = 2500/w_L^2$.

6.3. $2\dfrac{\partial(240L - 5L^2)}{\partial L} = 120 \Rightarrow$ L= 18.

Тесты

I. 4; **II.** 4; **III.** 3; **IV.** 1; **V**. 3.

Контрольные вопросы по курсу

1. Что такое математическая модель экономического объекта?
2. Как построить математическую модель экономического объекта?
3. Какие переменные в модели являются экзогенными, эндогенными?
4. Расскажите о классификации математических моделей экономики.
5. Дайте определение производственной функции, мультипликативной производственной функции, производственной функции Кобба-Дугласа.
6. Сформулируйте основные свойства, которые определяют неоклассическую производственную функцию.
7. Как определяется средняя производительность труда, средняя производительность фондов, предельная производительность труда, предельная производительность фондов?
8. Какой экономический смысл коэффициентов A, α_1, α_2 мультипликативной производственной функции?
9. Какова норма замены труда фондами и норма замены фондов трудом? Как связаны между собой эти величины?
10. Что такое изокванта и в чем ее экономический смысл?
11. Что такое изоклиналь и в чем ее экономический смысл?
12. В чем смысл производственной функции в темповой записи?
13. Сформулируйте понятие экономического равновесия. Чем устойчивое равновесие отличается от неустойчивого?
14. Расскажите о стационарном и переходном режимах в модели экономического роста Солоу.
15. Расскажите об основных уравнениях и показателях, образующих модель Солоу.
16. Расскажите о характеристиках эффективности производства.
17. Что такое предельная норма замещения труда фондами?
18. Что такое стационарный режим в односекторной модели оптимального экономического роста?
19. Сформулируйте «золотое правило» накопления в модели экономики Солоу с производственной функцией Кобба-Дугласа.
20. Расскажите о модели межотраслевого баланса.
21. Какой смысл имеют коэффициенты технологической матрицы A модели Леонтьева?
22. Сформулируйте свойства продуктивности и прибыльности модели Леонтьева.
23. Что такое равновесие в классической модели рыночной экономики?
24. Расскажите о механизме взаимодействия рынков товаров, рабочей силы и денег в классической модели экономики.
25. Дайте определения товара.
26. Что такое функция спроса на ресурсы?
27. Запишите условие оптимальности решения задачи фирмы.
28. Производственное множество и его свойства.
29. Дайте определение функции спроса на ресурсы.
30. Дайте определение функции предложения продукции.
31. Закончить утверждение «Увеличение цены выпуска приводит к увеличению спроса...»
32. Сформулируйте оптимальную задачу производителя при налоге с прибыли.
33. Сформулируйте оптимальную задачу производителя при акцизном налоге.
34. Стратегия Курно.
35. Стратегия Стакельберга.

Итоговый тест

1. Производственная функция в некоторой стране имеет вид: $Y = (K\ L)^{0.5}$. Предположим, что в наблюдаемый период отсутствуют технический прогресс и рост населения, а норма выбытия капитала составляет 5%. При этом ежегодно сберегается 30% от объема национального производства. Определить уровень дохода на одного работающего, соответствующий устойчивому запасу капитала.

1) 4; 2) 6; 3) 5; 4) 1.5; 5) 3.8.

2. Какое равновесие экономической системы называется устойчивым?

1) Когда экономика имеет устойчивые темпы роста.
2) Когда государственный бюджет на протяжении нескольких лет не имеет дефицита.
3) Если выведенная из состояния равновесия, экономика сама в него возвращается.
4) Если нет инфляции и безработицы.
5) Когда на денежном рынке устанавливаются относительные цены.

3. Какое положение является исходным постулатом классической школы?

1) Эффективный спрос порождает предложение;
2) Предложение благ порождает спрос на них;
3) Общее равновесие экономической системы устанавливается через равновесие на денежном рынке;
4) Государство не должно вмешиваться в развитие экономики.
5) В состоянии равновесия не все факторы могут быть вовлечены в процесс производства.

4. В чем причина выхода экономической системы из равновесия с точки зрения классиков?

1) Уровень цен опережает рост денежной массы.
2) В разбалансировании денежного рынка;
3) В ошибках правительства, войнах, неблагоприятных природно-климатических явлениях;
4) В снижении общих закупок по сравнению с выпуском продукции;
5) В неразвитости производственной сферы.

5. Что понимается экономистами классиками под равновесием на рынке рабочей силы?

1) Равенство спроса и предложения рабочей силы, через которое устанавливается уровень реальной заработной платы;
2) Равенство спроса и предложения рабочей силы, через которое устанавливается уровень номинальной заработной платы;
3) Полная занятость населения, которая способствует использованию всех факторов производства.
4) Такой уровень занятости, который дает максимизировать объем производства.
5) Равновесием на рынке рабочей силы определяется производством в экономической системе.

6. От чего зависит уровень цен в национальной экономике?

1) От равновесного состояния совокупного спроса и совокупного предложения;
2) От состояния рынка труда и уровня реальной заработной платы;
3) От объема денежной массы, находящейся в обращении;

4) От равновесного уровня процентной ставки.
5) От скорости оборота денег.

7. Какие действия со стороны правительства возможны, по мнению классиков, при нарушении макроэкономического равновесия?
1) Дополнительное стимулирование экономического развития за счет привлечения внутреннего золотого запаса;
2) Не требуется государственного вмешательства, т.к. имеются автоматические стабилизаторы;
3) Понижение (повышение) уровня процентной ставки;
4) Привлечение государственных (бюджетных) ассигнований при резком падении производства.
5) Сохранять принцип нейтральности по отношению к действующим на рынке экономическим субъектам, оставив за собой законодательные функции и контроль за их выполнением.

8. Неоклассические модели экономического роста основаны на...
1) ...равенстве запланированных сбережений и запланированных инвестиции.
2) ... методе распределения дохода между заработной платой и прибылью.
3) … факторном подходе в исследовании агрегированной производственной функции.
4) ... ожиданиях предпринимателей относительно совокупного спроса.
5) … переходе на более высокий уровень потребления сразу же при повышении дохода.

9. Какая из формул представляет ключевое уравнение накопления капитала по модели Р. Солоу?
1. $\frac{dk}{dt} = -(\lambda + \mu)k + \rho(1-a)x,$
2. $i = \rho(1-a)x,$
3. $c = (1-\rho)(1-a)x,$
4. $x = f(k),$
5. $f'(k^*) = (\lambda + \mu)/(1-a).$

10. Если в экономике имеющийся запас капитала меньше, чем необходимо по «золотому правилу накопления», это означает, что...
1) ... понизится уровень потребления.
2) ... увеличится объем производства.
3) ... повысится норма сбережений.
4) ... сократится объем инвестиций.
5) … повысится уровень цен в экономической системе;

11. Используя условие теста 1, найдите объем потребления на одного работающего, соответствующий устойчивому уровню запаса капитала.
1) 4,2. 2) 3,4. 3) 6.1 4) 2.5 5) 5.4

12. Какие факторы влияют на объем денежной массы (М) на рынке?
1) Скорость оборота денежной единицы;
2) Уровень цен в экономической системе;
3) Отсутствие равновесия на денежном рынке;
4) Уровень процентной ставки;
5) Объем национального производства.

Толковый словарь терминов

Автономная модель – часть системы моделей, которую можно анализировать независимо от других частей.

Авторегрессивная модель – статистическое описание связи значений одного и того же показателя в разные моменты времени.

Агрегирование – объединение, укрупнение показателей по какому-либо признаку. С математической точки зрения агрегирование рассматривается как преобразование модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений (агрегированную модель), дающую приближенное (по сравнению с исходным) описание изучаемого процесса или объекта.

Адекватность модели – соответствие модели моделируемому объекту или процессу.

Аналитическая модель – формула, представляющая математические зависимости в экономике.

Балансовая модель – 1. Система уравнений (балансовых уравнений), которые удовлетворяют требованию соответствия двух элементов: наличие ресурса и его использования. 2. При описании экономической системы в целом – система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребность в этой продукции.

Безработица – избыточное предложение труда при заданной его цене.

Бюджетное множество – множество наборов товаров (x_1, x_2, ..., x_n), доступных индивиду при его доходе Q ценах (p_1, p_2, ..., p_n).

Валовой выпуск – стоимость продуктов и услуг, являющихся результатом деятельности хозяйственных объектов страны в течение данного периода. Включает выпуск продуктов, рыночных и нерыночных услуг. При вычитании из ВВ промежуточного потребления получается валовой внутренний продукт – как конечный результат производственной деятельности.

Вектор «затрат – выпуска» – вектор, содержащий компоненты двух видов: выпускаемые продукты (обычно положительные) и продукты, затрачиваемые в производстве (отрицательные).

Взаимозаменяемость ресурсов – возможность альтернативного использования разных ресурсов: а) для сохранения или достижения заданного уровня производства, б) для достижения оптимума.

Гессе матрица – матрица вторых частных производных функций нескольких переменных. Характеристика матрицы Гессе (ее положительная или отрицательная определенность и полуопределенность) служит условием для определения вида стационарной точки: является ли она, соответственно, минимумом, максимумом или седловой точкой в задаче оптимизации.

Госсена законы – 1. Предельная полезность любого товара уменьшается по мере увеличения его потребления. 2. Индивиду невыгодно потреблять одно благо вместо другого и вообще как-то изменять структуру потребления, поскольку всякое такое изменение только ухудшает его благосостояние.

Градиент – вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания функции и равный по величине ее производной в этом направлении.

Динамические модели экономики – модели, описывающие экономику в развитии.

Золотое правило накопления – в условиях модели экономического роста фонд потребления на душу населения растет с максимальным темпом, если норма сбережения равна эластичности объема выпуска по капиталу.

Изокванта – геометрическое место точек, в которых различные сочетания факторов производства дают одно и то же количество продукции.

Изоклиналь – линия наибольшего роста ПФ.

Кобба-Дугласа функция – ПФ, примененная исследователями Ч. Коббом и П. Дугласом при анализе развития экономики США в 20-30 гг. нашего века. Имеет следующую форму $X = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}$ где X – НД, A – коэффициент размерности, K, L –соответственно объемы приложения капитала и труда, α_K, α_L – константы (коэффициенты эластичности по капиталу и по труду.

Конечный продукт – обобщающий показатель объема общественного производства. Включает годовую продукцию отраслей материального производства, поступающую на цели личного и общественного потребления, на накопление основных и оборотных фондов, на возмещение выбывших основных фондов, а также разницу (сальдо) между экспортом и импортом.

Коэффициенты прямых затрат – (технологические коэффициенты) в межотраслевом балансы – средние величины непосредственных затрат продукции одной отрасли (в качестве средств производства) на выпуск единицы продукции другой отрасли.

Кривая безразличия – геометрическое место точек пространства товаров, характеризующихся состоянием безразличия с точки зрения потребителя или производителя.

Линия уровня – линией уровня на поверхности $Y= F(K,L)$ называется множество тех точек поверхности, для которых $F(K,L)=const$.

Макроэкономическая модель – ЭММ, отражающая функционирование народного хозяйства как единого целого. Макромодели оперируют, как правило, стоимостными показателями – НД, валовые капиталовложения и другие. Важным приложением является прогнозирование народнохозяйственных процессов. Для этого используются макроэкономические ПФ.

Микроэкономическая модель – ЭММ, отражающая функционирование и структуру отдельного элемента экономической системы, взаимодействие его с другими элементами системы в процессе ее функционирования. Сюда относятся, например, модель фирмы, модель спроса и потребления, модель ценообразования, модель рынка товаров и т. д.

Многосекторная модель – модель народного хозяйства, представляющая его как совокупность крупных секторов. Например, производство средств производства и производство предметов потребления, и тогда имеется двух секторная модель. Можно выделить такие секторы, как государственный, кооперативный, частный. Если в качестве секторов принимаются отрасли производство, то такая модель называется многоотраслевой.

Модель – математическое или логическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса (обычно рассматриваемых как системы или элементы системы).

Однопродуктовая модель народного хозяйства – ЭММ, в которой экономика рассматривается как производство одного продукта, часть которого идет на потребление, часть – на увеличение основных и оборотных фондов.

Оптимальность по Парето – итальянский экономист В. Парето сформулировал критерий оптимальности: «Следует считать, что любое изменение, которое никому не причиняет убытков и которое приносит некоторым людям пользу (по их собственной оценке), является улучшением».

Первичные ресурсы – элементы производства, поступающие в экономическую систему извне, в отличие от ресурсов, порожденных самой системой, и продуктов – результатов производства, выходящих за ее пределы.

Показатель – выраженная числом характеристика какого-либо свойства экономического объекта, процесса или решения.

Предельная норма замены – S_K труда фондами называется отношение модулей дифференциалов основных фондов и труд $S_K = \dfrac{dK}{|dL|} = -\dfrac{dK}{dL} = \dfrac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}$, S_L фондов трудом $S_L = -\dfrac{dL}{dK} = \dfrac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}$. Для мультипликативной функции $S_K = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}k$: недостаток труда можно компенсировать его лучшей фондовооруженностью.

Предельная полезность – дополнительная полезность, получаемая от потребления дополнительной единицы какого-либо блага (частная производная функции полезности по этому благу).

Приведенные затраты – 1. Расчетная категория, отражающая величину текущих и единовременных (капитальных) затрат на производство продукции. 2. Затраты в базовый момент времени, равноценные по своему народнохозяйственному значению оцениваемым затратам, произведенным (или возможным) в другие моменты времени.

Производительность труда – продуктивность деятельности людей, измеряемая количеством продукции, произведенной работником в сфере материального производства за единицу рабочего времени.

Производственная функция – функция характеризующая зависимость между количеством применяемых ресурсов и объемом выпускаемой продукции.

Пространство товаров – множество всех возможных наборов благ (товаров), потенциально доступных потребителям.

Равновесие (экономической системы) – 1) состояние, которое характеризуется равенством спроса и предложения всех ресурсов; 2) состояние, когда ни один из многих взаимосвязанных участников системы не заинтересован в изменении этого состояния, так как при этом он не может ничего выиграть, но может проиграть.

Рынок – механизм распределения благ посредством добровольного обмена, в форме бартера, и посредством промежуточного обмена благ на особый товар – деньги. Во втором случае обмен принимает форму купли-продажи, а его участники приобретают статус продавцов и покупателей. Продавцы обменивают товары на деньги, покупатели – деньги на товар.

Солоу модель роста – односекторная модель экономического роста. Экономическая система рассматривается как единое целое, производит единый продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться.

Слуцкого уравнения – уравнения, характеризующие количественные зависимости между изменением цен на отдельные товары и доходов потребителей, с одной стороны, и структурой покупательного спроса – с другой.

Теория фирмы – теория поведения фирмы в разных условиях (принципы и мотивы принятия решений о ценах, о выпуске, инвестициях и т.д.).

Теория экономического роста – экономико-математическая дисциплина, в центре которой исследование макроэкономических моделей, характеризующих основные взаимосвязи общих показателей развития народного хозяйства, таких, как НД, КП, норма накопления, объем капиталовложений и др.

Фондоемкость – показатель, определяемый объемом ОПФ, приходящихся на единицу продукции. На макроэкономическом уровне измеряется фондоемкость совокупного общественного продукта (или КП, или НД). На микроэкономическом уровне – фондоемкость производства в целом и фондоемкость производства отдельных видов продукции.

Фондоотдача – величина, обратная фондоемкости, объем продукции в расчете на единицу используемых производственных фондов.

Функция полезности – функция на множестве потребительских наборов товаров $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, значение которой на потребительском наборе $(x_1, x_2, ..., x_n)$ равно потребительской оценке индивидуума для этого набора.

Функция потребления – функция, отражающая зависимость объема потребления от дохода или иного показателя.

Функция спроса – зависимость объема спроса от определяющих его факторов.

Экзогенные (эндогенные) величины При использовании моделей в экономических расчетах все величины, характеризующие моделируемые объекты, подразделяются на экзогенные, или входные и эндогенные, или выходные.

Руководство по изучению дисциплины

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Целью курса «Математическая экономика» является освоение студентами современных математических методов анализа, научного прогнозирования поведения экономических объектов.

Основное внимание в содержании данного курса уделено вопросам математического моделирования экономических процессов, протекающих в реальных экономических объектах на микро- и макроуровнях.

Освоение данного курса будет способствовать развитию у студентов умения и навыков анализа поведения экономических объектов, глубокому пониманию особенностей их функционирования в условиях рыночной экономики, освоению методов выбора наиболее эффективных решений, развитию у студентов аналитического мышления.

Программа курса рассчитана на 64 часа аудиторных занятий в виде лекций и практических занятий.

В качестве контрольных мероприятий предусмотрено выполнение по основным темам курса контрольных заданий с последующей сдачей в конце учебного года зачета.

2. Содержание основных тем программы

Введение. Основы моделирования экономических процессов

Система. Модель. Основные типы соотношений, формирующие математическую модель. Аналитические выражения физических законов или общепринятых правил учета хозяйственной деятельности, эмпирические соотношения, соотношения нормативного характера, соотношения, выражаемые бинарным отношением предпочтения на области допустимых значений. Полная, упрощенная и имитационная математическая модель. ([1]: стр. 6-9). Экономическая система как объект управления. Основные методы изучения экономики и её подсистем. ([2]: стр. 7-15)

Раздел I. Моделирование макроэкономических процессов и систем

2.1. Тема 1. Производственные функции

Понятие производственной функции. Производственная функция как основа моделирования экономических объектов на макроуровнях. Некоторые наиболее общие свойства производственных функций. Двухфакторная производственная функция. Неоклассическая производственная функция. Условия, которым должна отвечать неоклассическая производственная функция и их экономическая интерпретация. Мультипликативная производственная функция. Производственная функция Кобба–Дугласа. Производственная функция в темповой записи. Понятие эластичности функции. Экономическая интерпретация параметров мультипликативной производственной функции. Средние и предельные (маржинальные) значения производственной функции. ([1]: стр. 10-13)

Изокванты, изоклинали и их свойства. Связь между изоквантами и изоклиналями. Эластичность и норма замещения производственных факторов. Оценка с помощью производственной функции масштаба и эффективности производства. ([1]: стр. 14-18)

Основные типы производственных функций, использующиеся в экономико-математических исследованиях. Методы построения производственных функций. ([1]: стр. 18-21)

2.2. Тема 2. Модели макроэкономической динамики

Динамическая односекторная модель экономического роста Солоу. Стационарный и переходный режимы. Типы переходных процессов. Оптимальная норма накопления. «Золотое правило» накопления. ([1]: стр. 24-29) Динамическая односекторная модель оптимального экономического роста при переменной норме накопления. Стационарный режим управления. Оптимальные траектории фондовооруженности и удельного потребления. Учет запаздывания при вводе фондов. Принцип максимума Понтрягина. Односекторная модель оптимального экономического роста. Модель смены технологического уклада в экономике. Переходный период и стационарный режим нового способа производства. Оптимальная норма накопления. Траектории фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления. ([2]: стр. 46-60)

2.3. Тема 3. Модели межотраслевого баланса

Статическая модель линейной многоотраслевой экономики Леонтьева, её свойства продуктивности и прибыльности. Матрица прямых, матрица полных затрат. Модель Леонтьева и теория трудовой стоимости Маркса. Агрегирование нормативных показателей. ([1]: стр. 32-41)

2.4. Тема 4. Классическая модель рыночной экономики и модель Кейнса

Классическая модель рыночной экономики. Модели рынков рабочей силы, денег и товаров. Их взаимосвязь и условия равновесного состояния. Равновесие в классической модели рыночной экономики при отсутствии переполнения рынков товаров и рабочей силы. Механизм поддержания равновесия. ([1]: стр. 45-48) .

Модель Кейнса. Модели рынков рабочей силы, денег и товаров и их взаимосвязь. Равновесие в модели рыночной экономики Кейнса при линейных зависимостях. Механизм поддержания общего равновесия. ([2]: стр. 136-140).

2.5. Тема 5. Математические модели финансового рынка

Содержание финансового рынка. Финансовые операции. Финансовый риск. Оптимизация портфеля ценных бумаг. Модификация портфеля ценных бумаг. Равновесие на рынке ценных бумаг. ([2]: стр. 141-161) .

Раздел II. Моделирование микроэкономических процессов и систем

2.6. Тема 6. Модели поведения потребителя

Предпочтения потребителя. Функция полезности. Поверхность безразличия. Предельные полезности и предельные нормы замещения товаров. Бюджетное множество. Функция спроса на товары в зависимости от доходов и цен. Уравнение Слуцкого. Различные типы товаров. ([1]: стр. 51-55) .

2.7. Тема 7. Модели фирмы и монополии

Производственное множество. Поверхность производственных возможностей. Производственная функция фирмы. Закон убывающей предельной эффективности и предельной нормы замены ресурсов. Функция издержек. Выбор объемов производства на основе влияния налоговой ставки на деятельность фирм. Поведение фирм на конкурентных рынках. Алгоритм Курно, стратегия Стакельберга. ([1]: стр. 59-67) .

Моделирование формирования цен на товары и факторы производства в условиях действия монополий, а также потерь потребителя от монополий. ([2]: стр. 123-130) .

Описание конкуренции фирм с помощью теории игр. Торг по Нэшу. ([4]: стр. 60-62, 85-96).

2.8. Тема 8. Модели распределения богатства в обществе

Общественные блага и математическая теория общественного выбора. Групповая функция полезности. Кривая Лоренца. Модели перераспределения доходов. ([4]: стр. 131-134).

2.9. Тема 9. Модели государственного регулирования экономики

Роль государства в экономике. Регулирование потребления и накопления малосекторных моделях экономики. Математические модели структурных сдвигов. Модели распределения налогового бремени. Математические критерии эффективности государственного регулирования экономики. ([2]: стр. 181-213) .

Распределение часов по видам учебных занятий и темам

Наименование разделов тем	Всего	Лекции	Практ.
Введение. Основы моделирования экономических процессов.	4	2	2
Тема 1. Производственные функции.	8	4	4
Тема 2. Модели макроэкономической динамики.	6	4	2
Тема 3. Модели межотраслевого баланса.	8	4	4
Тема 4. Классическая модель рыночной экономики и модель Кейнса	8	2	6
Тема 5. Модели финансового рынка	8	4	4
Тема 6. Модели поведения потребителя.	6	2	4
Тема 7. Модели фирмы и монополии.	6	4	2
Тема 8. Модели распределения богатства в обществе	4	2	2
Тема 9. Модели государственного регулирования экономики	6	4	2
Всего	64	32	32

3. Вопросы для самопроверки

1. Что такое математическая модель экономического объекта?
2. Как построить математическую модель экономического объекта?
3. Какие переменные в модели являются экзогенными, эндогенными?
4. Расскажите о классификации математических моделей экономики.
5. Что такое производственная функция?
6. Мультипликативная производственная функция и её свойства.
7. Какова норма замены труда фондами и норма замены фондов трудом? Как связаны между собой эти величины?
8. Что такое предельные эффективности фондов и труда?
9. Сформулируйте основные свойства, которые определяют неоклассическую производственную функцию.
10. Что такое коэффициенты эластичности?
11. Какой экономический смысл коэффициентов А, α_1, α_2 мультипликативной производственной функции?
12. Дайте определение изокванты, изоклинали, расскажите о их свойствах.
13. В чем смысл производственной функции в темповой записи?
14. Расскажите о характеристиках эффективности производства.
15. Что такое предельная норма замещения труда фондами?
16. Расскажите об основных уравнениях и показателях, образующих модель Солоу.
17. Сформулируйте «золотое правило» накопления в модели экономики Солоу.
18. Расскажите о стационарном и переходном режимах в модели экономического роста Солоу.
19. Расскажите о механизме поддержания равновесия в модели Солоу.
20. Расскажите об оптимальных траекториях фондовооруженности и удельного потребления в односекторной модели оптимального экономического роста.
21. Расскажите о модели смены технологического уклада в экономике.
22. Расскажите о модели межотраслевого баланса.
23. Сформулируйте свойства продуктивности и прибыльности модели Леонтьева.
24. Какой смысл имеют коэффициенты технологической матрицы А модели Леонтьева?
25. Что такое равновесие в классической модели рыночной экономики?
26. Расскажите о механизме взаимодействия рынков товаров, рабочей силы и денег в классической модели экономики.
27. Дайте определения товара.
28. Что такое функция спроса на ресурсы?
29. Запишите условие оптимальности решения задачи фирмы.
30. Производственное множество и его свойства.
31. Дайте определение функции предложения продукции.
32. Расскажите о математической модели распределения налогового бремени.
33. Сформулируйте аксиому производителя.
34. Оптимальная задача производителя.
35. Запишите условие оптимальности решения задачи фирмы.

4. Контрольные задания

По курсу «Математическая экономика» студент должен выполнить контрольные задания. Номер варианта контрольных заданий должен совпадать с последней цифрой номера студенческого билета. Номера задач к соответствующим вариантам даны в таблице 1.

Таблица 1

Вариант	Номера задач
1	1, 11, 21, 31
2	2, 12, 22, 32
3	3, 13, 23, 33
4	4, 14, 24, 34
5	5, 15, 25, 35
6	6, 16, 26, 36
7	7, 17, 27, 37
8	8, 18, 28, 38
9	9, 19, 29, 39
10	10, 20, 30, 40

5. Контрольные задания и методические указания к их выполнению

Задания № 1-10.

Задана мультипликативная производственная функция производственной подсистемы экономики некоторой страны

$$X = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L},$$

а также показатели экономики:

$\widetilde{X}$ – валовый выпуск продукции,

$\widetilde{K}$ – объем основных фондов,

$\widetilde{L}$ – объем трудовых ресурсов,

выраженные в относительных (безразмерных) единицах и соответствующих некоторому периоду времени.

Требуется найти:

1.Отношение предельной производительности труда к средней производительности труда.

2.Отношение предельной фондоотдачи к средней фондоотдаче.

3.На сколько процентов измениться выпуск, если основные фонды увеличить на 1%.

4.На сколько процентов измениться выпуск, если число занятых увеличить на 1%.

5.Построить семейство изоквант и изоклиналей.

6.Показатель эффективности экономики страны Е и показатель масштаба производства М, а также выполнить анализ состояния и поведения экономики страны за рассматриваемый период времени.

Исходные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ задачи	α_K	α_L	$\tilde{X}$	$\tilde{K}$	$\tilde{L}$
1	0,006	1,09	2,3	2,87	1,52
2	0,35	0,93	1,8	2,5	1,29
3	0,8	0,14	1,13	1,04	1,16
4	0,94	1,1	6,8	4,9	1,45
5	0,47	4,27	4,5	3,7	1,24
6	1,25	0,09	6,8	4,9	1,45
7	0,62	2,64	2,1	2,0	1,12
8	0,58	2,67	3,27	3,72	1,15
9	0,64	1,38	2,2	1,74	1,03
10	0,72	0,71	1,25	1,38	1,04

Пример решения заданий № 1-10.

Задана мультипликативная производственная функция производственной подсистемы экономики некоторой страны

$$X = 2{,}278K^{0{,}404}\cdot L^{0{,}803}$$

и показатели экономики:

$\tilde{X} = 2{,}82$ – валовый выпуск продукции,

$\tilde{K} = 2{,}88$ – объем основных фондов,

$\tilde{L} = 1{,}93$ – объем трудовых ресурсов,

выраженные в относительных (безразмерных) единицах и соответствующих некоторому периоду времени.

Требуется найти показатель эффективности экономики страны Е и показатель масштаба производства М, а также выполнить анализ состояния и поведения экономики страны за рассматриваемый период времени.

Решение. Частные производные выпуска по факторам называются предельными (маржинальными) эффективностями факторов и характеризуют прирост выпуска на единицу прироста фактора:

$\partial F / \partial K$ – предельная эффективность фондов (предельная фондоотдача),

$\partial F / \partial L$ – предельная эффективность труда (предельная производительность труда).

Для мультипликативной функции

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 A K^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 Y}{K} > 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 1} = \frac{\alpha_2 Y}{L} > 0.$$

Это означает, что предельная производительность труда пропорциональна с коэффициентом α_2 средней производительности труда $\frac{X}{L}$, а предельная фондоотдача – средней фондоотдаче $\frac{X}{K}$ с коэффициентом α_1.

$$\frac{dX}{dL} = \alpha_2 \frac{X}{L}, \qquad \frac{dX}{dK} = \alpha_1 \frac{X}{K}.$$

1.Отсюда Отношение предельной производительности труда к средней производительности труда равно 0.803.

2.Отношение предельной фондоотдачи к средней фондоотдаче равно 0.404. Коэффициент эластичности фактора показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если фактор увеличится на 1%. Согласно ПФ, заданной в условии задачи

3.При увеличении ОФ на 1%, валовой выпуск увеличится на 0,404%.

4.При увеличении занятых на 1% – на 0,803%.

5.Построить семейство изоквант и изоклиналей.

Изоквантой называется множество точек плоскости, для которых $F(K,L) = X_0 = const$. Для мультипликативной ПФ заданной в условии задачи изокванта имеет вид

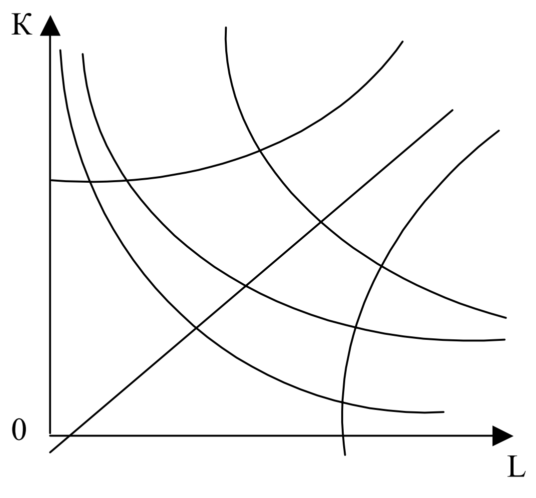
$$2.278K^{0.404}L^{0.803} = X_0 = const, \text{ или } K = \left(\frac{X_0}{2.278}\right)L^{-1.988},$$

т.е. является степенной гиперболой, асимптотами которой служат оси координат.

Изоклиналями называются линии наибольшего роста ПФ. Изоклинали ортогональны линиям нулевого роста, т.е. изоквантам. Поскольку направление наибольшего роста в каждой точке (*K, L*) задается градиентом $gradF = \left(\frac{dF}{dK}, \frac{dF}{dL}\right)$, то уравнение изоклинали записывается в форме $\frac{dK}{(\partial F/\partial K)} = \frac{dL}{(\partial F/\partial L)}$. В частности, для мультипликативной ПФ $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}$, $\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}$, поэтому изоклиналь задается дифференциальным уравнением $\frac{1}{\alpha_1} KdK = \frac{1}{\alpha_2} LdL$, которое имеет решение

$$K = \sqrt{0.503L^2 + a}, \quad a = K_0 - 0.503L_0,$$

где (L_0, K_0) – координаты точки, через которую проходит изоклиналь.



6.Показатель эффективности экономики страны Е и показатель масштаба производства М, а также выполнить анализ состояния и поведения экономики страны за рассматриваемый период времени.

Эффективность экономики страны оценивается с помощью обобщенного показателя, представляющего собой взвешенное среднегеометрическое частных показателей экономической эффективности

$$E = \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}}\right)^{1-\alpha},$$

в котором роль весов выполняют относительные эластичности $\alpha = \dfrac{\alpha_K}{\alpha_K + \alpha_L}$ и $1 - \alpha = \dfrac{\alpha_L}{\alpha_K + \alpha_L}$. Частные показатели эффективности представляют собой:

$\dfrac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}}$ – фондоотдача; $\dfrac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}}$ – производительность труда.

Подставив исходные данные задачи, получим:

$$\alpha = \frac{\alpha_K}{\alpha_K + \alpha_L} = \frac{0,404}{0,404 + 0,803} = 0,33,$$

$$1 - \alpha = \frac{\alpha_L}{\alpha_K + \alpha_L} = \frac{0,803}{0,404 + 0,803} = 0,67,$$

$$\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}} = \frac{2,82}{2,88} = 0,98, \quad \frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}} = \frac{2,82}{1,93} = 1,46,$$

Эффективность экономики страны найдем как среднегеометрическое из частных эффективностей.

$$E = \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}}\right)^{0.33} \cdot \left(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}}\right)^{0.67} = 0.98^{0.33} \cdot 1.46^{0.67} \approx 1.28.$$

Так как валовый выпуск продукции $\widetilde{X}$ представляет собой произведение экономической эффективности экономики страны на масштаб производства, т.е. $\widetilde{X} = E \cdot M$, то $M = \dfrac{\widetilde{X}}{E}$.

Подставив исходные данные, получим:

$$M = \frac{\widetilde{X}}{E} = \frac{2,82}{1,28} \approx 2,21.$$

Таким образом, валовый выпуск продукции в экономике рассматриваемой страны за указанный период вырос в 2,825 раза. В том числе и за счет роста масштаба производства в 2,21 раза.

Задания № 11-20.

Используя модель Солоу с производственной функцией Кобба-Дугласа, у которой A и α заданы в таблице 3, найти значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории, для которой норма накопления $\rho = 0,2$, выбытие фондов $\mu = 0,2$ за год, а годовой прирост трудовых ресурсов $\nu = 0,05$.

Таблица 3

№ задачи	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	10^3	10^2	10^4	10^3	10^2	10^4	10^4	10^5	10^6	10^6
α	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/3

Пример решения заданий № 11-20.

Пусть $\alpha = 1/2$ и $A = 10^6$, норма накопления $\rho = 0{,}2$, выбытие фондов (в расчете на год) $\mu = 0{,}2,$ годовой прирост трудовых ресурсов $\nu = 0{,}05$.

На стационарной траектории значение фондовооруженности, будет равно

$$k^0 = \left(\frac{\rho A}{(\mu+\nu)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Производительность труда сходится к стационарному значению, равному

$$y^0 = A\left(\frac{\rho A}{(\mu+\nu)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Таким образом, значение фондовооруженности будет

$$k^0 = \left(\frac{\rho A}{(\mu+\nu)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0{,}2\cdot 10^6}{0{,}25}\right)^2 = 64\cdot 10^{10}.$$

Значение производительности труда составит

$$y^0 = A\left(\frac{\rho A}{(\mu+\nu)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 10^6\left(\frac{0{,}2\cdot 10^6}{0{,}25}\right) = 8\cdot 10^{11}.$$

Значение удельного потребления составит

$$C^0 = A(1-\rho)\left(\frac{\rho A}{(\mu+\nu)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0{,}8\left(8\cdot 10^{11}\right) = 0{,}64\cdot 10^{12}.$$

Задания № 21-30.

Пусть все народное хозяйство (район и т.д.) состоит из трех отраслей, каждая из которых выпускает один вид продукции. В таблице 4 указаны расходные коэффициенты (прямые затраты) a_{ik} единиц продукции i-й отрасли, используемые как сырье (промежуточный продукт) для выпуска единицы продукции k-й отрасли, а также количество единиц y_i продукции i-й отрасли, предназначенные для реализации (конечный продукт).

Пусть дополнительно заданы расходные нормы двух видов сырья и топлива на единицу продукции соответствующей отрасли, трудоемкость продукции в человеко-часах на единицу продукции, стоимость единицы соответствующего материала и оплата за 1 чел.-ч. (таблица 5).

Определить:

1. Коэффициенты полных затрат.
2. Валовой выпуск для каждой отрасли.
3. Производственную программу отраслей.

4.Коэффициенты косвенных затрат.

5.Суммарный расход сырья, топлива и трудовых ресурсов на выполнение производственной программы.

6.Коэффициенты прямых затрат сырья, топлива и труда на единицу конечной продукции каждой отрасли.

7.Расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по отраслям.

8.Производственные затраты в денежных единицах по отраслям и на всю производственную программу.

9.Производственные затраты на единицу конечной продукции.

10. Параметры агрегирования при объединении первой и третьей отраслей.

Задание 21

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.4	0	300
II	0.2	0.7	0.1	200
III	0	0.3	0.2	300

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.4	0.8	5
Сырье В	0.5	0.6	1.6	12
Топливо	2.0	1.8	2.0	7
Трудоемкость	11	23	30	1.4

Задание 22

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.8	0.2	0	100
II	0.2	0.3	0.1	400
III	0	0.1	0.2	300

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.6	0.4	0.8	15
Сырье В	0	0.6	1.6	10
Топливо	2.0	1.8	2.2	8
Трудоемкость	10	30	40	2.2

Задание 23

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.2	0	300
II	0.3	0.6	0.1	100
III	0	0.1	0.2	400

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	3.4	2.4	1.8	15
Сырье В	0.2	0.6	1.6	12
Топливо	2.0	1.8	2.2	2
Трудоемкость	20	20	30	1.2

Задание 24

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.5	0.2	0.1	200
II	0.4	0.5	0.1	200
III	0	0.1	0.2	400

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.7	1.4	0.8	5
Сырье В	1.0	1.6	1.6	12
Топливо	2.0	1.8	3.2	12
Трудоемкость	40	20	30	1.3

Задание 25

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.9	0.1	0	400
II	0.2	0	0.1	100
III	0.3	0.1	0.2	400

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье A	2.2	1.7	1.0	9
Сырье B	1.3	1.6	1.0	13
Топливо	2.1	2.8	2.4	3
Трудоемкость	16	21	32	1.3

Задание 26

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.2	0	400
II	0.3	0	0.1	200
III	0.2	0.4	0.2	200

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье A	2.4	2.2	1.8	4
Сырье B	1.2	0	2.6	10
Топливо	3.0	2.8	3.2	5
Трудоемкость	20	10	26	2.2

Задание 27

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.2	0.2	0	500
II	0.2	0.7	0.1	200
III	0	0.3	0.2	100

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье A	2.4	1.4	0.6	7
Сырье B	1.0	0.6	2.6	14
Топливо	1.0	1.3	2.0	5
Трудоемкость	14	24	26	1.5

Задание 28

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.3	0.2	0	400
II	0.5	0	0.5	400
III	0	0.4	0.2	200

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье A	1.8	0.4	0.8	7
Сырье B	2.0	1.6	0.6	15
Топливо	1.2	1.9	1.2	3
Трудоемкость	15	22	18	2.2

Задание 29

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.2	0	200
II	0.2	0.7	0.1	500
III	0	0.2	0.2	100

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье A	1.6	2.6	1.2	8
Сырье B	0.6	0	1.8	14
Топливо	2.2	2.4	2.4	4
Трудоемкость	12	22	31	1.4

Задание 30

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0	0.2	0.2	200
II	0.3	0	0.1	300
III	0.7	0.1	0.2	400

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.5	2.5	0.9	6
Сырье В	0.5	0.2	1.5	10
Топливо	1.2	1.4	2.5	2.5
Трудоемкость	12	25	20	1.5

Пример решения заданий № 21-30.

Таблица 4

Отрасли	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0	0.2	0	200
II	0.2	0	0.1	100
III	0	0.1	0.2	300

Таблица 5

	Прямые затраты a_{ik}			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	2.4	0.8	5
Сырье В	0	0.6	1.6	12
Топливо	2.0	1.8	2.2	2
Трудоемкость	10	20	30	1.2

Решение.

1. Обозначим производственную программу $X = (x_1, x_2, x_3)$ (x_i – валовой выпуск продукции i-й отраслью), а выпуск товарной продукции $Y = (y_1, y_2, y_3)$. $A = \{a_{ik}\}$ расходные коэффициенты (таблица 1), тогда производственные взаимосвязи могут быть представлены формулой

$$X - AX = Y,$$

где AX – внутрипроизводственное потребление.

$$(E - A)\, X = Y.$$

$$X = (E - A)^{-1} Y\,.$$

$(E - A)^{-1} = \{s_{ik}\}$ – матрица обратная для $(E - A)$, представляет собой искомые коэффициенты полных внутрипроиводственных затрат.

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.04 & 0.21 & 0.03 \\ 0.21 & 1.06 & 0.13 \\ 0.03 & 0.13 & 1.27 \end{pmatrix}$$

Таким образом, например, для выпуска единицы продукции I, II, III отраслей необходимо затратить продукции I-й отрасли соответственно 1.04, 0. 21, 0.03 единиц.

2. Для определения валового выпуска продукции отраслей воспользуемся равенством

$$X = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1.04 & 0.21 & 0.03 \\ 0.21 & 1.06 & 0.13 \\ 0.03 & 0.13 & 1.27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 187 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 238$, $x_2 = 187$, $x_3 = 400$.

3. Производственную программу каждого из отраслей можно определить из соотношений:

$$x_{ik} = a_{ik}\, x_k \,(k = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3),$$

и представить в виде таблицы:

Таблица 6

Отрасли	Внутрипроизводственное потребление			Итого	Конечный продукт	Валовой выпуск
	I	II	III			
I	0	37	0	37	200	238
II	48	0	40	88	100	187
III	0	19	80	99	300	400

4. Коэффициенты косвенных затрат найдем по формуле:

$$(E - A)^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1.04 & 0.01 & 0.03 \\ 0.01 & 1.06 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 & 1.07 \end{pmatrix}.$$

5. Суммарный расход сырья A, сырья B, топлива и труда можно получить, умножив матрицу нормы расхода на валовой выпуск:

$$\begin{pmatrix} 1.4 & 2.4 & 0.8 \\ 0 & 0.6 & 1.6 \\ 2.0 & 1.8 & 2.2 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 238 \\ 187 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1102 \\ 752 \\ 1692 \\ 18120 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{сырье A} \\ \text{сырье B} \\ \text{топливо} \\ \text{труд} \end{array}$$

6. Расход сырья на единицу конечной продукции отраслей (соответствующие коэффициенты полных затрат сырья, топлива и труда на каждую единицу конечного продукта) получим из произведения матриц:

$$\begin{pmatrix} 1.4 & 2.4 & 0.8 \\ 0 & 0.6 & 1.6 \\ 2.0 & 1.8 & 2.2 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.04 & 0.21 & 0.03 \\ 0.21 & 1.06 & 0.13 \\ 0.03 & 0.13 & 1.27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.98 & 2.94 & 1.37 \\ 0.17 & 0.84 & 2.11 \\ 2.52 & 2.61 & 3.09 \\ 15.2 & 24.8 & 28.3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, для изготовления y_1=1 необходимо затратить 1.98 единиц сырья A, 0.17 единиц сырья B, 2.52 единиц топлива и 15.2 человека-часов.

7. Расход сырья, топлива и труда по каждой отрасли получим из умножения их расходных норм на соответствующие валовые выпуски по отраслям. В результате получим матрицу полных затрат.

$$\begin{array}{l} \text{Сырье A} \\ \text{Сырье B} \\ \text{Топливо} \\ \text{Труд} \end{array} \begin{pmatrix} 1.4\times 238 = 333 & 2.4\times 187 = 449 & 0.8\times 400 = 320 \\ 0\times 238 = 0 & 0.6\times 187 = 112 & 1.6\times 400 = 640 \\ 2\times 238 = 476 & 1.8\times 187 = 337 & 2.2\times 400 = 880 \\ 10\times 238 = 2380 & 20\times 187 = 3740 & 30\times 400 = 12000 \end{pmatrix}.$$

8. Производственные расходы по отраслям можно получить путем умножения слева строки стоимостей (5, 12, 2, 1.2) на матрицу п. 7:

$$\begin{pmatrix} 5, & 12, & 2, & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 333 & 449 & 320 \\ 0 & 112 & 640 \\ 476 & 337 & 880 \\ 2380 & 3740 & 12000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5473, & 8751, & 25940 \end{pmatrix}.$$

9. Производственные затраты на единицу конечной продукции, необходимые для определения себестоимости продукции, можем найти путем умножения слева матрицы полных затрат, найденной в п.6 на строку цен:

$$\begin{pmatrix} 5, & 12, & 2, & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.98 & 2.94 & 1.37 \\ 0.17 & 0.84 & 2.11 \\ 2.52 & 2.61 & 3.09 \\ 15.2 & 24.8 & 28.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35.2 & 59.6 & 72.3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, внутрипроизводственные затраты на единицу товарной продукции I, II, III отраслей соответственно равны: 35.2, 59.6, 72.3.

10. Выделим в таблице отрасли подлежащие агрегированию. Присвоим новой отрасли индекс k. Матрица коэффициентов прямых затрат с учетом агрегирования определяется формулой

$$A_{агр} = TAW^*,$$

где матрицы T получается из единичной матрицы с помощью горизонтальной деформации:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

матрица W^* получается из единичной матрицы с весовыми коэффициентами с помощью деформации по столбцам:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & W_3 \end{pmatrix} \Rightarrow W^* = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ W_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$W_1 = x_1 /(x_1 + x_3) = 237/638 = 0.373,$ $\qquad W_3 = x_3 /(x_1 + x_3) = 400/638=0.627.$

$$A_{агр} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.373 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.672 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1254 & 0.3 \\ 0.1373 & 0 \end{pmatrix}.$$

Новая производственная программа имеет вид:

Таблица 7

Отрасли	Внутрипроизводственное потребление		Итого	Конечный продукт	Валовой выпуск
	К	П			
К	80	56	136	500	638
П	88	0	88	100	187

Задания № 31-40.

Найти значение спроса на рабочую силу в модели Кейнса при общем равновесии на рынке денег и рынке товаров, при максимуме прибыли относительно капитала и при выполнении следующих условий:

1. Предложение товаров *Y* является функцией Кобба-Дугласа $F(K,L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$ с известными *A* и α;
2. Спрос на потребительские товары задаётся линейной функцией $C(Y) = a + b \cdot Y$ с известными значениями *a* и *b*;
3. Спрос на инвестиционные товары задаётся линейной функцией от нормы процента $I(r) = d - f \cdot r$ с известными *d* и *f*;
4. Спрос на облигации задаётся линейной функцией $Lq(r) = h - j \cdot r$ с известными коэффициентами *h* и *j*;
5. Известны значения предложений денег M^S, цена продукта р и коэффициент пропорциональности денежного дохода *k*.

Исходные данные приведены в таблице 8.

Таблица 8

№ задачи	A	α	A	b	d	f	h	j	M^S	p	k
31	2	1/2	$1{,}0\cdot10^4$	0,5	$1{,}0\cdot10^4$	$2{,}0\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^4$	4	$4{,}0\cdot10^4$	1	0,8
32	3	1/3	$1{,}5\cdot10^4$	0,5	$1{,}5\cdot10^4$	$3{,}0\cdot10^3$	$1{,}8\cdot10^4$	6	$6{,}0\cdot10^4$	1	0,8
33	4	1/4	$2{,}0\cdot10^4$	0,5	$2{,}0\cdot10^4$	$4{,}0\cdot10^3$	$2{,}4\cdot10^4$	8	$8{,}0\cdot10^4$	1	0,8
34	5	1/5	$2{,}5\cdot10^4$	0,5	$2{,}5\cdot10^4$	$5{,}0\cdot10^3$	$3{,}0\cdot10^4$	10	$1{,}0\cdot10^5$	1	0,8
35	2	1/2	$1{,}5\cdot10^4$	0,5	$1{,}5\cdot10^4$	$3{,}0\cdot10^3$	$1{,}8\cdot10^4$	6	$6{,}0\cdot10^4$	1	0,8
36	3	1/3	$2{,}0\cdot10^4$	0,5	$2{,}0\cdot10^4$	$4{,}0\cdot10^3$	$2{,}4\cdot10^4$	8	$8{,}0\cdot10^4$	1	0,8
37	4	1/4	$2{,}5\cdot10^4$	0,5	$2{,}5\cdot10^4$	$5{,}0\cdot10^3$	$3{,}0\cdot10^4$	10	$1{,}0\cdot10^5$	1	0,8
38	5	1/5	$1{,}0\cdot10^4$	0,5	$1{,}0\cdot10^4$	$2{,}0\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^4$	4	$4{,}0\cdot10^4$	1	0,8
39	4	1/4	$1{,}5\cdot10^4$	0,5	$1{,}5\cdot10^4$	$3{,}0\cdot10^3$	$1{,}8\cdot10^4$	6	$6{,}0\cdot10^4$	1	0,8
40	3	1/3	$2{,}5\cdot10^4$	0,5	$2{,}5\cdot10^4$	$5{,}0\cdot10^3$	$3{,}0\cdot10^4$	10	$1{,}0\cdot10^5$	1	0,8

Пример решения заданий № 31-40.

Рассмотрим пример решения задачи при следующих данных:

$A = 2$ $\quad h = 0{,}6 \cdot 10^4$

$\alpha = 0{,}5$ $\quad j = 2$

$a = 5 \cdot 10^3$ $\quad M^S = 2 \cdot 10^4$

$b = 0{,}5$ $\quad p = 1$

$d = 5 \cdot 10^3$ $\quad k = 0{,}8$

$f = 1{,}0 \cdot 10^3$.

Решение.

Так как общее равновесие на рынке денег и товаров достигается при условии

$$\frac{a + d - f \cdot r}{1 - b} = \frac{M^S - h + j \cdot r}{k \cdot p},$$

то равновесное значение нормы процента будет равно

$$r^* = \frac{(a + d)k \cdot p - (M^S - h)(1 - b)}{f \cdot k \cdot p + j(1 - b)}.$$

Если подставим исходные данные, то получим $r^* = 1{,}248$.

Равновесное значение предложения товаров будет равно $Y^* = \dfrac{a + d - f \cdot r^*}{1 - b} = 17504$.

Максимум прибыли относительно капитала определяется равенством $p\dfrac{\partial F}{\partial K} = r$.

Отсюда находим, что значение фондовооруженности $\dfrac{K}{L} = 0{,}64$.

Потребность в рабочей силе определяется из уравнения $17504 = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$,

которое можно записать в виде $17504 = 2\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot L$.

Откуда $L^* = 10940$.

6. Литература

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
2. Громенко В. М. Математические методы исследования экономики. Учебно-практическое пособие, 2000.
3. Иванилов Ю. П. Математические модели оптимизации в экономике. – М.: Наука, 1979.
4. Котов И. В. Математическое моделирование макроэкономических процессов. – Л.: ЛГУ, 1980.
5. Колемаев В. А. Математические модели макроэкономики. – М.: ГАУ, 1994.
6. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.
7. Лебедев В. В. Математические модели децентрализованной экономики. – М.: ГАУ, 1992.
8. Колемаев В. А. Малыхин В. И. Математическая экономика в примерах и задачах. – М.: ГАУ, 1995.
9. Экланд И. Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1988.
10. Самуэльсон П. Экономика. – М.: Прогресс, 1992.
11. Аллен Р. Математическая экономика.» М.: Изд-во иностр. лит. 1963.
12. Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. – М.: Наука, 1986.

При разработке контрольных заданий использовались материалы, изложенные в пособиях:

1.Колемаев В. А. и др. Математическая экономика в примерах и задачах. – М.: ГАУ, 1995.
2.Громенко В.М. Математические методы исследования экономики. Учебно-практическое пособие, 2000.

Учебная программа по дисциплине

для специальности
«Прикладная информатика в экономике» (351400)

1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Целью курса «Математическая экономика» является освоение студентами современных математических методов анализа, научного прогнозирования поведения экономических объектов.

Основное внимание в содержании данного курса уделено вопросам математического моделирования экономических процессов, протекающих в реальных экономических объектах на микро- и макроуровнях.

Освоение данного курса будет способствовать развитию у студентов умения и навыков анализа поведения экономических объектов, глубокому пониманию особенностей их функционирования в условиях рыночной экономики, освоению методов выбора наиболее эффективных решений, развитию у студентов аналитического мышления.

Программа курса рассчитана на 64 часа аудиторных занятий в виде лекций и практических занятий.

В качестве контрольных мероприятий предусмотрено выполнение по основным темам курса контрольных заданий с последующей сдачей в конце учебного года зачета.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ ПО ВИДАМ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ И ТЕМАМ

Наименование разделов тем	Всего	Лекции	Практ.
Введение. Основы моделирования экономических процессов.	4	2	2
Тема 1. Производственные функции.	8	4	4
Тема 2. Модели макроэкономической динамики.	6	4	2
Тема 3. Модели межотраслевого баланса.	8	4	4
Тема 4. Классическая модель рыночной экономики и модель Кейнса	8	2	6
Тема 5. Модели финансового рынка	8	4	4
Тема 6. Модели поведения потребителя.	6	2	4
Тема 7. Модели фирмы и монополии.	6	4	2
Тема 8. Модели распределения богатства в обществе	4	2	2
Тема 9. Модели государственного регулирования экономики	6	4	2
Всего	64	32	32

3. ЛИТЕРАТУРА

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.

2. Громенко В. М. Математические методы исследования экономики. Учебно-практическое пособие, 2000.

3. Иванилов Ю. П. Математические модели оптимизации в экономике. – М.: Наука, 1979.

4. Котов И. В. Математическое моделирование макроэкономических процессов. – Л.: ЛГУ, 1980.

5. Колемаев В. А. Математические модели макроэкономики. – М.: ГАУ, 1994.

6. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.

7. Лебедев В. В. Математические модели децентрализованной экономики. – М.: ГАУ, 1992.

8. Колемаев В. А. Малыхин В. И. Математическая экономика в примерах и задачах. – М.: ГАУ, 1995.

9. Экланд И. Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1988.

10. Самуэльсон П. Экономика. – М.: Прогресс, 1992.

11. Аллен Р. Математическая экономика». – М.: Изд-во иностр. лит. 1963.

12. Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. – М.: Наука, 1986.

При разработке контрольных заданий использовались материалы, изложенные в пособиях:

Колемаев В.А. и др. Математическая экономика в примерах и задачах. - М. ГАУ. 1995.

Громенко В.М. Математические методы исследования экономики. Учебно-практическое пособие. 2000 г.

4. СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ ПРОГРАММЫ

Введение. Основы моделирования экономических процессов.

Система. Модель. Основные типы соотношений, формирующие математическую модель. Аналитические выражения физических законов или общепринятых правил учета хозяйственной деятельности, эмпирические соотношения, соотношения нормативного характера, соотношения, выражаемые бинарным отношением предпочтения на области допустимых значений. Полная, упрощенная и имитационная математическая модель. Экономическая система как объект управления. Основные методы изучения экономики и её подсистем.

Раздел I. Моделирование макроэкономических процессов и систем.

Тема 1. Производственные функции.

Понятие производственной функции. Производственная функция как основа моделирования экономических объектов на макроуровнях. Некоторые наиболее общие свойства производственных функций. Двухфакторная производственная функция. Неоклассическая производственная функция. Условия, которым должна отвечать неоклассическая производственная функция и их экономическая интерпретация. Мультипликативная производственная функция. Производственная функция Кобба–Дугласа. Производственная функция в темповой записи. Понятие эластичности функции. Экономическая интерпретация параметров мультипликативной производственной функции. Средние и предельные (маржинальные) значения производственной функции.

Изокванты, изоклинали и их свойства. Связь между изоквантами и изоклиналями. Эластичность и норма замещения производственных факторов. Оценка с помощью производственной функции масштаба и эффективности производства.

Основные типы производственных функций, использующиеся в экономико-математических исследованиях. Методы построения производственных функций.

Тема 2. Модели макроэкономической динамики.

Динамическая односекторная модель экономического роста Солоу. Стационарный и переходный режимы. Типы переходных процессов. Оптимальная норма накопления. «Золотое правило» накопления. Динамическая односекторная модель оптимального экономического роста при переменной норме накопления. Стационарный режим управления. Оптимальные траектории фондовооруженности и удельного потребления. Учет запаздывания при вводе фондов. Принцип максимума Понтрягина. Односекторная модель оптимального экономического роста. Модель смены технологического уклада в экономике. Переходный период и стационарный режим нового способа производства. Оптимальная норма накопления. Траектории фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления.

Тема 3. Модели межотраслевого баланса.

Статическая модель линейной многоотраслевой экономики Леонтьева, её свойства продуктивности и прибыльности. Матрица прямых, матрица полных затрат. Модель Леонтьева и теория трудовой стоимости Маркса. Агрегирование нормативных показателей.

Тема 4. Классическая модель рыночной экономики и модель Кейнса

Классическая модель рыночной экономики. Модели рынков рабочей силы, денег и товаров. Их взаимосвязь и условия равновесного состояния. Равновесие в классической модели рыночной экономики при отсутствии переполнения рынков товаров и рабочей силы. Механизм поддержания равновесия.

Модель Кейнса. Модели рынков рабочей силы, денег и товаров и их взаимосвязь. Равновесие в модели рыночной экономики Кейнса при линейных зависимостях. Механизм поддержания общего равновесия.

Тема 5. Математические модели финансового рынка

Содержание финансового рынка. Финансовые операции. Финансовый риск. Оптимизация портфеля ценных бумаг. Модификация портфеля ценных бумаг. Равновесие на рынке ценных бумаг.

Раздел II. Моделирование микроэкономических процессов и систем.

Тема 6. Модели поведения потребителя.

Предпочтения потребителя. Функция полезности. Поверхность безразличия. Предельные полезности и предельные нормы замещения товаров. Бюджетное множество. Функция спроса на товары в зависимости от доходов и цен. Уравнение Слуцкого. Различные типы товаров.

Тема 7. Модели фирмы и монополии.

Производственное множество. Поверхность производственных возможностей. Производственная функция фирмы. Закон убывающей предельной эффективности и предельной нормы замены ресурсов. Функция издержек. Выбор объемов производства на основе влияния налоговой ставки на деятельность фирм. Поведение фирм на конкурентных рынках. Алгоритм Курно, стратегия Стакельберга. Моделирование формирования цен на товары и факторы производства в условиях действия монополий, а также потерь потребителя от монополий. Описание конкуренции фирм с помощью теории игр. Торг по Нэшу.

Тема 8. Модели распределения богатства в обществе.

Общественные блага и математическая теория общественного выбора. Групповая функция полезности. Кривая Лоренца. Модели перераспределения доходов.

Тема 9. Модели государственного регулирования экономики.

Роль государства в экономике. Регулирование потребления и накопления малосекторных моделях экономики. Математические модели структурных сдвигов. Модели распределения налогового бремени. Математические критерии эффективности государственного регулирования экономики.

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое математическая модель экономического объекта?
2. Как построить математическую модель экономического объекта?
3. Какие переменные в модели являются экзогенными, эндогенными?
4. Расскажите о классификации математических моделей экономики.
5. Что такое производственная функция?
6. Мультипликативная производственная функция и её свойства.
7. Какова норма замены труда фондами и норма замены фондов трудом? Как связаны между собой эти величины?
8. Что такое предельные эффективности фондов и труда?
9. Сформулируйте основные свойства, которые определяют неоклассическую производственную функцию.
10. Что такое коэффициенты эластичности?
11. Какой экономический смысл коэффициентов A, α_1, α_2 мультипликативной производственной функции?
12. Дайте определение изокванты, изоклинали, расскажите о их свойствах.
13. В чем смысл производственной функции в темповой записи?
14. Расскажите о характеристиках эффективности производства.
15. Что такое предельная норма замещения труда фондами?
16. Расскажите об основных уравнениях и показателях, образующих модель Солоу.
17. Сформулируйте «золотое правило» накопления в модели экономики Солоу.
18. Расскажите о стационарном и переходном режимах в модели экономического роста Солоу.
19. Расскажите о механизме поддержания равновесия в модели Солоу.
20. Расскажите об оптимальных траекториях фондовооруженности и удельного потребления в односекторной модели оптимального экономического роста.
21. Расскажите о модели смены технологического уклада в экономике.
22. Расскажите о модели межотраслевого баланса.
23. Сформулируйте свойства продуктивности и прибыльности модели Леонтьева.
24. Какой смысл имеют коэффициенты технологической матрицы A модели Леонтьева?
25. Что такое равновесие в классической модели рыночной экономики?
26. Расскажите о механизме взаимодействия рынков товаров, рабочей силы и денег в классической модели экономики.
27. Дайте определения товара.
28. Что такое функция спроса на ресурсы?
29. Запишите условие оптимальности решения задачи фирмы.
30. Производственное множество и его свойства.
31. Дайте определение функции предложения продукции.
32. Расскажите о математической модели распределения налогового бремени.
33. Сформулируйте аксиому производителя.
34. Оптимальная задача производителя.
35. Запишите условие оптимальности решения задачи фирмы.

Данную программу для чтения лекций и проведения практических занятий используют все преподаватели кафедры ИО.