**Непосредственное интегрирование**

**Повторение:**

 **Интеграл** — одно из важнейших понятий [математического анализа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7), которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении [функции](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) по её [производной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) (*неопределённый интеграл*). Упрощённо интеграл можно представить как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых.

Пусть дана  f(x){\displaystyle f(x)} — [функция](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) [действительной переменной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%B9%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE).

 ***Неопределённым интегралом*** функции  f(x){\displaystyle f(x)}, или её [*первообразной*](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%8F)*,* называется такая функция F(x) {\displaystyle F(x)}, [производная](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) которой равна {\displaystyle f(x)}f(x), то есть {\displaystyle F'(x)=f(x)} . Обозначается это так:

{\displaystyle F(x)=\int f(x)dx}

Операция нахождения интеграла называется ***интегрированием***.

 Для того чтобы справиться с интегральным исчислением  Вам необходимо уметь находить производные, минимум, на среднем уровне. Не лишним опытом будет, если у Вас за плечами несколько десятков (лучше – сотня) самостоятельно найденных производных. По-крайней мере, Вас не должны ставить в тупик задания на дифференцирование простейших и наиболее распространенных функций. Дело в том, что **нахождение производных и нахождение неопределенных интегралов (дифференцирование и интегрирование) – это два взаимно обратных действия**, как, например, сложение/вычитание или умножение/деление. Таким образом, без навыка (+ какого-никакого опыта) нахождения производных, к сожалению, дальше не продвинуться.

**Свойства интегралов**

1)

2) ;

4) ;

5)

**Таблица интегралов**

1.

 1a) 1b)

2)

3)

4) 5)

6) 7)

8) 9)

 10) 11)

  Посмотрим на таблицу интегралов. Как и в производных, мы замечаем несколько правил интегрирования и таблицу интегралов от некоторых элементарных функций. Нетрудно заметить, что любой табличный интеграл (да и вообще любой неопределенный интеграл) имеет вид:



Сразу разбираемся в обозначениях и терминах:

– значок интеграла.

 – подынтегральная функция (пишется с буквой «ы»).

 – значок дифференциала. При записи интеграла и в ходе решения важно не терять данный значок. **Заметная ошибка** будет.

 – подынтегральное выражение или «начинка» интеграла.

 – [**первообразная функция**](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html).

 – множество первообразных функций. Не нужно сильно загружаться терминами, самое важное, что в любом неопределенном интеграле к ответу приплюсовывается константа .

**Решить интеграл – это значит найти определенную функцию , пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.

Нахождение интеграла по формулам или с помощью алгебраических преобразований называется **непосредственным интегрированием**.

**Задание 1.** Вычислить неопределенный интеграл 

**Решение.** Для решения данного интеграла не нужно использовать свойства неопределенных интегралов, достаточно формулы интеграла степенной функции:



В нашем случае , тогда искомый интеграл равен:



**Ответ.** 

**Пример2:**Найти неопределённый интеграл

.

Решение (постоянный множитель можно выносить за знак интеграла):

.

.

Сокращаем получившиеся дроби и перед нами конечный ответ:

.

**Пример 3**

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

Проверка: .

**Пример 4**

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.


**Решение**:

**

В данном примере мы использовали формулу сокращенного умножения **

Проверка (устно).

Еще раз посмотрим на запись:



Посмотрим в таблицу интегралов.

Что происходит? Левые части  у нас **превращаются** в другие функции: .

Упростим наше определение.

**Решить неопределенный интеграл  – это значит ПРЕВРАТИТЬ его в определенную функцию , пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.

Возьмем, например, табличный интеграл . Что произошло?  превратился в функцию .

Как и в случае с производными, для того, чтобы научиться находить интегралы, не обязательно быть в курсе, [**что такое интеграл**](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html), [**первообразная функция**](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html) с теоретической точки зрения. Достаточно просто осуществлять превращения по некоторым формальным правилам. Так, в случае  совсем не обязательно понимать, почему интеграл превращается именно в . Пока можно принять эту и другие формулы как данность. Все пользуются электричеством, но мало кто задумывается, как там по проводам бегают электроны.

**Так как дифференцирование и интегрирование обратные операции, то для любой первообразной, которая найдена правильно, справедливо следующее**:



Иными словами, **если продифференцировать правильный ответ, то обязательно должна получиться исходная подынтегральная функция**.

Вернемся к тому же табличному интегралу .

Убедимся в справедливости данной формулы. Берем производную от правой части:

 – исходная подынтегральная функция.

Вот, кстати, стало понятнее, почему к функции  всегда приписывается константа . При дифференцировании константа всегда превращается в ноль.

**Решить неопределенный интеграл** – это значит найти **множество** всех первообразных, а не какую-то одну функцию. В рассматриваемом табличном примере , , ,  и т. д. – все эти функции являются решением интеграла . Решений бесконечно много, поэтому записывают коротко: 

Таким образом, любой неопределенный интеграл достаточно легко проверить. Переходим к рассмотрению конкретных примеров. Начнем, как и при изучении производной,
с двух правил интегрирования, которые также называют [***свойствами линейности***](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html)неопределенного интеграла:

 – постоянный множитель можно (и нужно) вынести за знак интеграла.

 – интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме двух интегралов от каждой функции в отдельности. Данное свойство справедливо для любого количества слагаемых.

Как видите, правила, в принципе, такие же, как и для производных.

Пример 5

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

Решение:


(1) Применяем правило . Не забываем записать значок дифференциала  под каждым интегралом. Почему под каждым? ** – это полноценный множитель**, если расписывать решение совсем детально, то первый шаг следует записать так:


(2) Согласно правилу , выносим все константы за знаки интегралов. Обратите внимание, что в последнем слагаемом  – это константа, её также выносим.
Кроме того, на данном шаге готовим корни и степени для интегрирования. **Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде . Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести вверх.**

**Проверка**. Для того чтобы выполнить проверку нужно продифференцировать полученный ответ:


Получена исходная **подынтегральная функция**, значит, интеграл найден правильно.

**!** Примечание: в отличие от производных, корни в интегралах далеко не всегда следует приводить к виду **, а степени переносить вверх. Например, ** – это готовый табличный интеграл, и всякие китайские хитрости вроде ** совершенно не нужны. Аналогично:** – тоже табличный интеграл, нет никакого смысла представлять дробь  в виде **.  **Внимательно изучите таблицу!**

(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулы: ,  и .
Особое внимание обращаю на формулу интегрирования степенной функции , она встречается очень часто, ее лучше запомнить. Следует отметить, что табличный интеграл  – частный случай этой же формулы: .
**Константу  достаточно приплюсовать один раз в конце выражения (а не ставить их после каждого интеграла)**.
(4) Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида ****снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем – сбрасываем обратно в знаменатель.

 Время от времени встречается немного другой подход к проверке неопределенного интеграла, от ответа берется не производная, а [**дифференциал**](http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html):


Пример 6

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.


**Решение:**



Пример7:



Пример 8

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.


 ***Решение***:

**

**Пример 9** Найти неопределённый интеграл

.

Решение. Видим в знаменателе подынтегрального выражения многочлен, в котором икс в квадрате. Это почти верный признак того, что можно применить табличный интеграл (с арктангенсом в результате). Выносим из знаменателя множитель-двойку (есть такое свойство интеграла - постоянный множитель можно выносить за знак интеграла). Результат всего этого:

.

Теперь в знаменателе сумма квадратов, а это значит, что можем применить упомянутый табличный интеграл. Окончательно получаем ответ:

.

**Задание.** Вычислить неопределенный интеграл 

**Решение.** Преобразуем подынтегральное выражение. Для этого вынесем из знаменателя  за знак интеграла



далее, используя таблицу интегралов, получим





**Ответ.** 

**Замечание: х – не под корнем!**

**Вторая вещь, которой не следует удивляться при интегрировании**. Хотя производная любой элементарной функции представляет собой также элементарную функцию, **неопределённые интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями**. Примерами таких интегралов могут быть следующие:













**Пример 10.**Найти неопределённый интеграл



Решение. (Найдём данный интеграл как сумму трёх интегралов):



Все три полученные интеграла – табличные. Используем формулу из таблицы интегралов при n = 1/2, n = 2 и n = 1/5, и тогда



где



объединяет все три произвольные постоянные, которые были введены при нахождении трёх интегралов. Поэтому в аналогичных ситуациях следует вводить только одну произвольную постоянную (константу) интегрирования.

**Пример 11.**Найти неопределённый интеграл

.

Решение. Когда в знаменателе подынтегральной дроби - одночлен, можем почленно разделить числитель на знаменатель. Исходный интеграл превратился в сумму двух интегралов:

.

Чтобы применить табличный интеграл, преобразуем корни в степени и вот уже окончательный ответ:



**Пример 12**

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.


 В данном примере подынтегральная функция представляет собой дробь. Когда мы видим в подынтегральном выражении дробь, то первой мыслью должен быть вопрос: А нельзя ли как-нибудь от этой дроби избавиться, или хотя бы её упростить?

 Замечаем, что в знаменателе находится одинокий корень из «икс». Один в поле – не воин, а значит, можно почленно разделить числитель на знаменатель:

**Пример 13.**Найти неопределённый интеграл



Решение. Если мы преобразуем подынтегральную функцию, возведя двучлен в квадрат и разделив почленно числитель на знаменатель, то исходный интеграл станет суммой трёх интегралов:



(мы применили обе нужные нам на этом уроке теоремы о свойствах интеграла). Все полученные интегралы – табличные. Используем формулу (7) из таблицы интегралов при n = 2/3, n = 7/6, n = 5/3 и за последним знаком равенства - окончательное решение.



**Пример 14.**Найти неопределённый интеграл

.

Решение. В подынтегральном выражении нужно умножить многочлен на одночлен, тогда получим сумму двух интегралов:

.

Применяем табличный интеграл, интегрируя степенные функции, и окончательный ответ:

.

**Пример 15.**Найти неопределённый интеграл

. Можно , ???

Решение. В подынтегральном выражении - многочлен в степени. Возведём его в степень и получим сумму интегралов, в которой постоянные множители вынесены за знаки интеграла:



Интегрируем каждое слагаемое и перед нами - окончательный ответ:



**Пример 16.**Найти неопределённый интеграл



Решение. Представим числитель подынтегральной функции, равный 1, в виде

=1

Тогда



Оба интеграла – табличные. Используя формулы и из таблицы интегралов, получим



**Интегрирование простейших дробей:**

1.
2. **(свойства 4 и 5, форм.1а)**
3.
4.

**Правильная дробь??? (степень числителя меньше степени знаменателя!)**

**Задание.** Разложить рациональную дробь  на простые дроби.

**Решение.** Так как корнями знаменателя являются значения , , то его можно разложить на множители следующим образом:



А тогда



Искомое разложение имеет вид:



Приводим к общему знаменателю в правой части равенства и приравниваем числители:





Приравнивая коэффициенты, при соответствующих степенях, получаем:



Отсюда, искомое разложение:



**Ответ.**  

1. Вычислить:

Разложим дробь под знаком интеграла на простейшие

X+18= A(x - 6) + B(x + 2)

-2

Самостоятельно:

**Ответы:** 2) arcsin(x/3)+C; 4) (1/5)\* ln(5x+3); 7)

8)

 5)

6)

1) =

3)