**Непосредственное интегрирование**

**Повторение:**

**Интеграл** — одно из важнейших понятий [математического анализа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7), которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении [функции](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) по её [производной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) (*неопределённый интеграл*). Упрощённо интеграл можно представить как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых.

Пусть дана  f(x){\displaystyle f(x)} — [функция](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) [действительной переменной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%B9%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE).

***Неопределённым интегралом*** функции  f(x){\displaystyle f(x)}, или её [*первообразной*](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%8F)*,* называется такая функция F(x) {\displaystyle F(x)}, [производная](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) которой равна {\displaystyle f(x)}f(x), то есть {\displaystyle F'(x)=f(x)} . Обозначается это так:

{\displaystyle F(x)=\int f(x)dx}

Операция нахождения интеграла называется ***интегрированием***.

Для того чтобы справиться с интегральным исчислением  Вам необходимо уметь находить производные, минимум, на среднем уровне. Не лишним опытом будет, если у Вас за плечами несколько десятков (лучше – сотня) самостоятельно найденных производных. По-крайней мере, Вас не должны ставить в тупик задания на дифференцирование простейших и наиболее распространенных функций. Дело в том, что **нахождение производных и нахождение неопределенных интегралов (дифференцирование и интегрирование) – это два взаимно обратных действия**, как, например, сложение/вычитание или умножение/деление. Таким образом, без навыка (+ какого-никакого опыта) нахождения производных, к сожалению, дальше не продвинуться.

**Свойства интегралов**

1)

2) ;

4) ;

5)

**Таблица интегралов**



1a) 1b)

2)

3)

4) 5)

6) 7)

8) 9)

10) 11)

  Посмотрим на таблицу интегралов. Как и в производных, мы замечаем несколько правил интегрирования и таблицу интегралов от некоторых элементарных функций. Нетрудно заметить, что любой табличный интеграл (да и вообще любой неопределенный интеграл) имеет вид:

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image002.gif  
  
Сразу разбираемся в обозначениях и терминах:

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image004.gif– значок интеграла.

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image006.gif – подынтегральная функция (пишется с буквой «ы»).

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image008.gif – значок дифференциала. При записи интеграла и в ходе решения важно не терять данный значок. **Заметная ошибка** будет.

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image010.gif – подынтегральное выражение или «начинка» интеграла.

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image012.gif – [**первообразная функция**](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html).

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image014.gif – множество первообразных функций. Не нужно сильно загружаться терминами, самое важное, что в любом неопределенном интеграле к ответу приплюсовывается константа http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image016.gif.

**Решить интеграл – это значит найти определенную функцию http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image018.gif, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.

Нахождение интеграла по формулам или с помощью алгебраических преобразований называется **непосредственным интегрированием**.

**Задание 1.** Вычислить неопределенный интеграл https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1814.png

**Решение.** Для решения данного интеграла не нужно использовать свойства неопределенных интегралов, достаточно формулы интеграла степенной функции:

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1811.png

В нашем случае https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1815.png, тогда искомый интеграл равен:

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1816.png

**Ответ.** https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1817.png

**Пример2:**Найти неопределённый интеграл

https://function-x.ru/chapter8-1/int100.gif.

Решение (постоянный множитель можно выносить за знак интеграла):

https://function-x.ru/chapter8-1/int101.gif.

https://function-x.ru/chapter8-1/int102.gif.

Сокращаем получившиеся дроби и перед нами конечный ответ:

https://function-x.ru/chapter8-1/int103.gif.

**Пример 3**

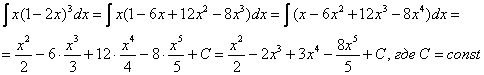
Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

Проверка: .

**Пример 4**

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image121.gif

**Решение**:

**

В данном примере мы использовали формулу сокращенного умножения *http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image137.gif*

Проверка (устно).

Еще раз посмотрим на запись:

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image020.gif

Посмотрим в таблицу интегралов.

Что происходит? Левые части http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image022.gif у нас **превращаются** в другие функции: http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image018_0000.gif.

Упростим наше определение.

**Решить неопределенный интеграл http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image022_0000.gif – это значит ПРЕВРАТИТЬ его в определенную функцию http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image014_0000.gif, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.

Возьмем, например, табличный интеграл http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image026.gif. Что произошло? http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image028.gif превратился в функцию http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image030.gif.

Как и в случае с производными, для того, чтобы научиться находить интегралы, не обязательно быть в курсе, [**что такое интеграл**](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html), [**первообразная функция**](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html) с теоретической точки зрения. Достаточно просто осуществлять превращения по некоторым формальным правилам. Так, в случае http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image026_0000.gif совсем не обязательно понимать, почему интегралhttp://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image028_0000.gif превращается именно в http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image030_0000.gif. Пока можно принять эту и другие формулы как данность. Все пользуются электричеством, но мало кто задумывается, как там по проводам бегают электроны.

**Так как дифференцирование и интегрирование обратные операции, то для любой первообразной, которая найдена правильно, справедливо следующее**:

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image032.gif

Иными словами, **если продифференцировать правильный ответ, то обязательно должна получиться исходная подынтегральная функция**.

Вернемся к тому же табличному интегралу http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image026_0001.gif.

Убедимся в справедливости данной формулы. Берем производную от правой части:

http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image035.gif – исходная подынтегральная функция.

Вот, кстати, стало понятнее, почему к функции http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image012_0000.gif всегда приписывается константа http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image016_0000.gif. При дифференцировании константа всегда превращается в ноль.

**Решить неопределенный интеграл** – это значит найти **множество** всех первообразных, а не какую-то одну функцию. В рассматриваемом табличном примере http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image039.gif, http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image041.gif, http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image043.gif, http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image045.gif и т. д. – все эти функции являются решением интеграла http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image028_0001.gif. Решений бесконечно много, поэтому записывают коротко: http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image047.gif

Таким образом, любой неопределенный интеграл достаточно легко проверить. Переходим к рассмотрению конкретных примеров. Начнем, как и при изучении производной,  
с двух правил интегрирования, которые также называют [***свойствами линейности***](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html)неопределенного интеграла:

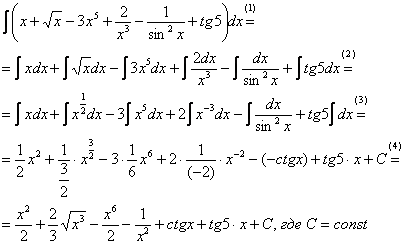
http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image049.gif – постоянный множитель можно (и нужно) вынести за знак интеграла.

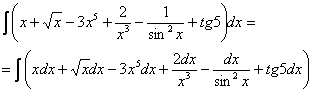
http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image052.gif – интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме двух интегралов от каждой функции в отдельности. Данное свойство справедливо для любого количества слагаемых.

Как видите, правила, в принципе, такие же, как и для производных.

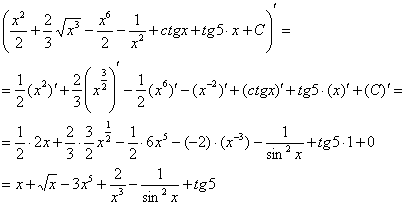
Пример 5

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

Решение:   


(1) Применяем правило http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image052_0000.gif. Не забываем записать значок дифференциала http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image008_0000.gif под каждым интегралом. Почему под каждым? **http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image008_0001.gif – это полноценный множитель**, если расписывать решение совсем детально, то первый шаг следует записать так:  


(2) Согласно правилу http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image049.gif, выносим все константы за знаки интегралов. Обратите внимание, что в последнем слагаемом http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image061.gif – это константа, её также выносим.  
Кроме того, на данном шаге готовим корни и степени для интегрирования. **Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image063.gif. Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести вверх.**

**Проверка**. Для того чтобы выполнить проверку нужно продифференцировать полученный ответ:  


Получена исходная **подынтегральная функция**, значит, интеграл найден правильно.

**!** Примечание: в отличие от производных, корни в интегралах далеко не всегда следует приводить к виду *http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image063_0000.gif*, а степени переносить вверх. Например, *http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image065.gif* – это готовый табличный интеграл, и всякие китайские хитрости вроде *http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image067.gif* совершенно не нужны. Аналогично:*http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image069.gif* – тоже табличный интеграл, нет никакого смысла представлять дробь  в виде *http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image071.gif*.  **Внимательно изучите таблицу!**

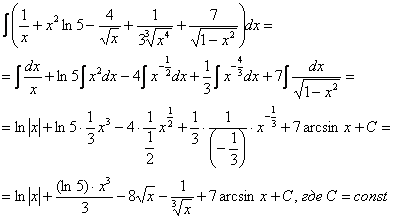
(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулы: http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image073.gif, http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image075.gif и http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image077.gif.  
Особое внимание обращаю на формулу интегрирования степенной функции http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image079.gif, она встречается очень часто, ее лучше запомнить. Следует отметить, что табличный интеграл http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image077_0000.gif – частный случай этой же формулы: http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image082.gif.  
**Константу http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image016_0002.gif достаточно приплюсовать один раз в конце выражения (а не ставить их после каждого интеграла)**.  
(4) Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида **http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image063_0001.gif**снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем – сбрасываем обратно в знаменатель.

Время от времени встречается немного другой подход к проверке неопределенного интеграла, от ответа берется не производная, а [**дифференциал**](http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html):  
http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image087.gif

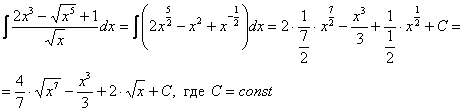
Пример 6

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image097.gif

**Решение:**



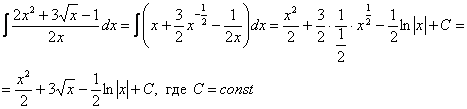
Пример7:



Пример 8

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image131.gif

***Решение***:

**

**Пример 9** Найти неопределённый интеграл

https://function-x.ru/chapter8-1/int088.gif.

Решение. Видим в знаменателе подынтегрального выражения многочлен, в котором икс в квадрате. Это почти верный признак того, что можно применить табличный интеграл (с арктангенсом в результате). Выносим из знаменателя множитель-двойку (есть такое свойство интеграла - постоянный множитель можно выносить за знак интеграла). Результат всего этого:

https://function-x.ru/chapter8-1/int089.gif.

Теперь в знаменателе сумма квадратов, а это значит, что можем применить упомянутый табличный интеграл. Окончательно получаем ответ:

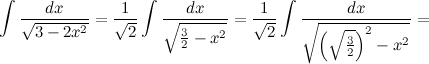
https://function-x.ru/chapter8-1/int090.gif.

**Задание.** Вычислить неопределенный интеграл https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1901.png

**Решение.** Преобразуем подынтегральное выражение. Для этого вынесем из знаменателя https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1902.png за знак интеграла

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1903.png

далее, используя таблицу интегралов, получим



https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1905.png

**Ответ.** https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1906.png

**Замечание: х – не под корнем!**

**Вторая вещь, которой не следует удивляться при интегрировании**. Хотя производная любой элементарной функции представляет собой также элементарную функцию, **неопределённые интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями**. Примерами таких интегралов могут быть следующие:

https://function-x.ru/chapter8-1/int121.gif

https://function-x.ru/chapter8-1/int122.gif

https://function-x.ru/chapter8-1/int123.gif

https://function-x.ru/chapter8-1/int124.gif

https://function-x.ru/chapter8-1/int125.gif

https://function-x.ru/chapter8-1/int126.gif

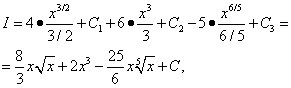
**Пример 10.**Найти неопределённый интеграл

https://function-x.ru/chapter8-1/integral1_clip_image068.gif

Решение. (Найдём данный интеграл как сумму трёх интегралов):

https://function-x.ru/chapter8-1/integral1_clip_image070.gif

Все три полученные интеграла – табличные. Используем формулу из таблицы интегралов при n = 1/2, n = 2 и n = 1/5, и тогда



где

https://function-x.ru/chapter8-1/integral1_clip_image074.gif

объединяет все три произвольные постоянные, которые были введены при нахождении трёх интегралов. Поэтому в аналогичных ситуациях следует вводить только одну произвольную постоянную (константу) интегрирования.

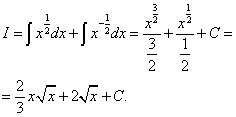
**Пример 11.**Найти неопределённый интеграл

https://function-x.ru/chapter8-1/int091.gif.

Решение. Когда в знаменателе подынтегральной дроби - одночлен, можем почленно разделить числитель на знаменатель. Исходный интеграл превратился в сумму двух интегралов:

https://function-x.ru/chapter8-1/int092.gif.

Чтобы применить табличный интеграл, преобразуем корни в степени и вот уже окончательный ответ:



**Пример 12**

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image123.gif

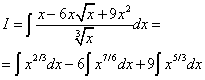
В данном примере подынтегральная функция представляет собой дробь. Когда мы видим в подынтегральном выражении дробь, то первой мыслью должен быть вопрос: А нельзя ли как-нибудь от этой дроби избавиться, или хотя бы её упростить?

Замечаем, что в знаменателе находится одинокий корень из «икс». Один в поле – не воин, а значит, можно почленно разделить числитель на знаменатель:

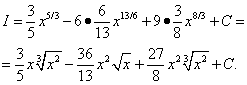
**Пример 13.**Найти неопределённый интеграл

https://function-x.ru/chapter8-1/integral1_clip_image076.gif

Решение. Если мы преобразуем подынтегральную функцию, возведя двучлен в квадрат и разделив почленно числитель на знаменатель, то исходный интеграл станет суммой трёх интегралов:



(мы применили обе нужные нам на этом уроке теоремы о свойствах интеграла). Все полученные интегралы – табличные. Используем формулу (7) из таблицы интегралов при n = 2/3, n = 7/6, n = 5/3 и за последним знаком равенства - окончательное решение.



**Пример 14.**Найти неопределённый интеграл

https://function-x.ru/chapter8-1/int094.gif.

Решение. В подынтегральном выражении нужно умножить многочлен на одночлен, тогда получим сумму двух интегралов:

https://function-x.ru/chapter8-1/int095.gif.

Применяем табличный интеграл, интегрируя степенные функции, и окончательный ответ:

https://function-x.ru/chapter8-1/int096.gif.

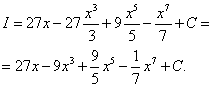
**Пример 15.**Найти неопределённый интеграл

https://function-x.ru/chapter8-1/int097.gif. Можно , ???

Решение. В подынтегральном выражении - многочлен в степени. Возведём его в степень и получим сумму интегралов, в которой постоянные множители вынесены за знаки интеграла:

https://function-x.ru/chapter8-1/int098.gif

Интегрируем каждое слагаемое и перед нами - окончательный ответ:



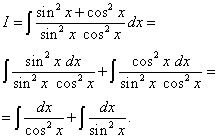
**Пример 16.**Найти неопределённый интеграл

https://function-x.ru/chapter8-1/integral1_clip_image082.gif

Решение. Представим числитель подынтегральной функции, равный 1, в виде

https://function-x.ru/chapter8-1/integral1_clip_image084.gif=1

Тогда

  
  
Оба интеграла – табличные. Используя формулы и из таблицы интегралов, получим

https://function-x.ru/chapter8-1/integral1_clip_image088.gif

**Интегрирование простейших дробей:**

2. **(свойства 4 и 5, форм.1а)**

**Правильная дробь??? (степень числителя меньше степени знаменателя!)**

**Задание.** Разложить рациональную дробь https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2408.png на простые дроби.

**Решение.** Так как корнями знаменателя являются значения https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2409.png, https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2410.png, то его можно разложить на множители следующим образом:

https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2411.png

А тогда

https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2412.png

Искомое разложение имеет вид:

https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2413.png

Приводим к общему знаменателю в правой части равенства и приравниваем числители:

https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2414.png

https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2415.png

Приравнивая коэффициенты, при соответствующих степенях, получаем:

https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2416.png

Отсюда, искомое разложение:

https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2417.png

**Ответ.**  https://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2417.png

1. Вычислить:

Разложим дробь под знаком интеграла на простейшие

X+18= A(x - 6) + B(x + 2)

-2

Самостоятельно:

**Ответы:** 2) arcsin(x/3)+C; 4) (1/5)\* ln(5x+3); 7)

8)

5)

6)

1) =

3)