**Производные высших порядков**

Производная 1 порядка (первая производная):

$у=х^{5}$ $y^{'}=5x^{4}$

 Производная второго порядка (вторая производная-производная от первой производной):

$$y^{''}=\left(y^{'}\right)^{'}=\left(5x^{4}\right)^{'}=20x^{3}$$

Производные третьего, четвертого порядка?

$y^{'''}=\left(y^{''}\right)^{'}=60x^{2}$ $y^{IV}=\left(y^{'''}\right)^{'}=120x$ или $\left(y^{\left(4\right)}=120x\right)$

 **СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ**

Что означают слова "задать функцию"? Они означают: объяснить всем желающим, о какой конкретной функции идёт речь. Причём, объяснить чётко и однозначно!

Как это можно сделать? Как задать функцию?

Можно написать формулу. Можно нарисовать график. Можно составить табличку. Любой способ - это какое-то правило, по которому можно узнать значение игрека для выбранного нами значения икс. Т.е. "задать функцию", это значит - показать закон, правило, по которому икс превращается в игрек.

**Аналитический способ задания функции.**

Самый универсальный и могучий способ. *Функция, заданная аналитически,* это функция, которая задана *формулами.*  Знакомые всем функции, например: *y = 2x,* или*y = x2* и т.д. заданы именно аналитически.

Не всякая формула может задавать функцию. Не в каждой формуле соблюдается жёсткое условие из [определения функции.](http://helpmatan.ru/index.php#opr) А именно - *на каждый икс может быть только****один****игрек.* Например, в формуле *у = ±х*, для **одного** значения х=2, получается **два** значения у: +2 и -2. Нельзя этой формулой задать однозначную функцию.

Чем хорош аналитический способ задания функции? Тем, что если у вас есть формула - вы знаете про функцию **всё!** Вы можете составить табличку. Построить график. Исследовать эту функцию по полной программе. Точно предсказать, где и как будет вести себя эта функция. Весь математический анализ стоит именно на таком способе задания функций.

**Табличный способ задания функции.**

Как следует из названия, этот способ представляет собой простую табличку. В этой таблице каждому значению икс соответствует какое-то значение игрека. В первой строчке - значения аргумента. Во второй строчке - соответствующие им значения функции, например:
Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | - 3 | - 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| y | 5 | 2 | - 4 | - 1 | 6 | 5 |

В данном примере игрек зависит от икса *как попало.* Нет никакой закономерности. Ничего страшного, так бывает.

Можно составить *другую* табличку, в которой будет закономерность. Этой табличкой будет задана *другая* функция, например:

Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | - 3 | - 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| y | - 6 | - 2 | 0 | 4 | 6 | 8 |

Уловили закономерность? Здесь все значения игрека получаются умножением икса на двойку. Вот и первый "хитрый" вопрос: можно ли функцию, заданную с помощью Таблицы 2, считать функцией *у = 2х*?

Чем хорош *табличный способ задания функции?* Да тем, что считать ничего не надо. Всё уже посчитано и написано в таблице. А более ничего хорошего нет. Мы не знаем значения функции для иксов, **которых нет в таблице.** В этом способе такие значения икса просто **не существуют.**  Мы не можем узнать, как ведёт себя функция за пределами таблицы. Ничего не можем. Да и наглядность в этом способе оставляет желать лучшего... Для наглядности хорош графический способ.

### Графический способ задания функции.

В данном способе функция представлена графиком. По оси абсцисс откладывается аргумент (х), а по оси ординат - значение функции (у). По графику тоже можно выбрать любой х и найти соответствующее ему значение у. График может быть любой, но... не какой попало. Мы работаем только с однозначными функциями. В [определении такой функции](http://helpmatan.ru/index.php#opr) чётко сказано: каждому х ставится в соответствие **единственный** у. **Один** игрек, а не два, или три... Для примера, посмотрим на окружность:



Окружность, как окружность... Почему бы ей не быть графиком функции? А давайте найдем, какой игрек будет соответствовать значению икса, например, х0? Этому икс соответствует **два** значения игрека.

Стало быть, такой график не будет графическим заданием функции. На **один** икс приходится **два** игрека. Не соответствует этот график определению функции.

Но если условие однозначности выполнено, график может быть совершенно любым. Например:



 Эта самая кривулина - и есть закон, по которому можно перевести икс в игрек. Однозначный. Захотелось нам узнать значение функции для х = 4, например. Надо найти четвёрку на оси иксов и посмотреть, какой игрек соответствует этому иксу. Наводим мышку на рисунок и видим, что значение функции у для х=4 равно 0. Какой формулой задано такое превращение икса в игрек - мы не знаем. И не надо. Графиком всё задано. **Перечислите основные свойства.**

Теперь можно вернуться к "хитрому" вопросу про у=2х. Построим график этой функции. Вот он:

 

Разумеется, при рисовании этого графика мы не брали бесконечное множество значений х. Взяли несколько значений, посчитали у, составили табличку - и всё готово! Самые грамотные вообще всего два значения икс взяли!

Но мы **совершенно точно знали,** что икс может быть **любым.** Целым, дробным, отрицательным... Любым. Это по формуле у=2х видно. Поэтому смело соединили точки на графике сплошной линией.

Если же функция будет нам задана Таблицей 2, то значения икса нам придётся брать **только из таблицы.** Ибо другие иксы (и игреки) нам не даны, и взять их негде. Нет их, этих значений, в данной функции. График получится **из отдельных точек.**

Вот и ответ на "хитрый" вопрос. Функция, заданная Таблицей 2 и функция у=2х - **разные.**

Графический способ хорош своей наглядностью. Сразу видно, как ведёт себя функция, где возрастает, где убывает. По графику сразу можно узнать некоторые важные характеристики функции. А уж в теме с производной, задания с графиками - сплошь и рядом!

Вообще, аналитический и графический способы задания функции идут рука об руку. Работа с формулой помогает построить график. А график частенько подсказывает решения, которые в формуле и не заметишь.

### Словесное описание функции.

Функцию можно задать **алгоритмическим** (или программным) способом, который широко используют при вычислениях на ЭВМ.

Наконец, можно отметить **описательный** (или словесный) способ задания функции, когда правило соответствия значений функции значениям аргумента выражено словами.

Например, функцию [x]=m  ∀x∈[m,m+1), m∈Z, называемую **целой частью** x, описывают обычно словами: «Наибольшее целое число, не превосходящее x».

Функцию можно вполне однозначно задать словами. Великий и могучий русский язык на многое способен! Скажем, функцию у=2х можно задать следующим словесным описанием: каждому действительному значению аргумента х ставится в соответствие его удвоенное значение. Вот так! Правило установлено, функция задана.

Более того, словесно можно задать функцию, которую формулой задать крайне затруднительно, а то и невозможно. Например: каждому значению натурального аргумента х ставится в соответствие сумма цифр, из которых состоит значение х. Например, если х=3, то у=3. Если х=257, то у=2+5+7=14. И так далее. Формулой это записать проблематично. А вот табличку легко составить. И график построить. Кстати, график забавный получается. Попробуйте.

Способ словесного описания - способ достаточно экзотичный. Но иногда встречается. Нужно просто понимать смысл слов **"функция задана..."** Вот он, этот смысл:

**Если есть закон однозначного соответствия между х и у - значит, есть функция. Какой закон, в какой форме он выражен - формулой, табличкой, графиком, словами, песнями, плясками - сути дела не меняет. Этот закон позволяет по значению икса определить соответствующее значение игрека. Всё.**

Задание 1:

*Функция у = f(x) задана Таблицей 1:*
Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | - 3 | - 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| y | 5 | 2 | - 4 | - 1 | 6 | 5 |

*Функция у = g(x) задана Таблицей 2:*
Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | - 3 | - 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| y | - 6 | - 2 | 0 | 4 | 6 | 8 |

  *Найти значение функции p(4), если p(х)= f(x) - g(x)*



Функция задана графиком. Решить неравенство $f(x)\geq 4$

Надо решить неравенство, которое (в привычной форме) блистательно отсутствует! Остаётся либо бросать задание, либо включить голову. Выбираем второе и рассуждаем.

Что значит решить неравенство? Это значит, найти все значения икс, при которых выполняется данное нам условие f(x) > 4. Т.е. все значения функции (у) должны быть больше четырех. На графике игрек всякий есть... И больше 4 есть, и меньше.

 **Сложная функция –**функция от функции.

Если *z* – функция от *у*, т.е. *z*(*y*), а *у*, в свою очередь, – функция от *х*, т.е. *у*(*х*), то функция *f*(*x*) = *z*(y(x)) называется *сложной функцией* (или *композицией*, или *суперпозицией функций*) от *х*.

В такой функции *х* – *независимая*, а *у* – *промежуточная переменная*. При этом сложная функция определена для тех значений независимой переменной, для которых значения промежуточной функции *у* входят в область определения функции *z*(*y*).

Пример: y=sin x, y=x2, y=2x – простые функции

y=sin x2, $y=2^{\sin(x)}$ y= $\sin(2^{x})$ - сложные функции.

Производная дифференцируемой сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточной функции по независимому аргументу:

.

Рассмотрим произвольную функцию, например, такую:



Заметим, что аргумент , стоящий в правой  и левой части уравнения функции - это одно и то же число, или выражение.

Вместо переменной  мы можем поставить, например, такое выражение: . И тогда мы получим функцию

.

Назовем выражение  промежуточным аргументом, а функцию  - внешней функцией. Это не строгие математические понятия, но они помогают уяснить смысл понятия сложной функции.

Чтобы найти производную сложной функции, нужно

1. Определить, какая функция является внешней и найти по таблице производных соответствующую производную.

2. Определить промежуточный аргумент.

В этой процедуре наибольшие затруднения вызывает нахождение внешней функции. Для этого используется простой алгоритм:

а. Запишите уравнение функции.

b. Представьте, что вам нужно вычислить значение функции при каком-то значении х. Для этого вы подставляете это значение х в уравнение функции и производите арифметические действия. То действие, которое вы делаете последним и есть внешняя функция.

Например, в функции

  последнее действие  - возведение числа 5 в степень (сложная показательная фунkция)

Найдем производную этой функции. Для этого запишем промежуточный аргумент

 как 

Получим 

Ищем в [таблице производных](https://ege-ok.ru/2012/01/31/kak-nayti-proizvodnuyu-tablitsa-proizvodnyih/)  производную показательной функции:



Получим:

     (1)

Теперь наша задача найти производную функции 

Заметим, что здесь мы опять имеем дело со сложной функцией. В этом выражении последнее действие - возведение в квадрат, а промежуточный аргумент .

Получаем:



Смотрим в [таблице производных](https://ege-ok.ru/2012/01/31/kak-nayti-proizvodnuyu-tablitsa-proizvodnyih/) производную синуса:



Получаем:



Подставим полученное значение производной в выражение (1):



И, наконец, упростим выражение, вспомнив формулу синуса двойного аргумента:



Таким образом,



Пример 1

Найти производную функции 

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение , поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя.

В данном примере понятно, что функция  – это сложная функция, причем многочлен  является внутренней функцией (вложением), а  – внешней функцией.

**Первый шаг**, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде  понятно, что под синус вложен многочлен . А как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике.

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения  при  (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно будет выполнить следующее действие: , поэтому многочлен  и будет внутренней функцией :

**Во вторую очередь** нужно будет найти , поэтому синус – будет внешней функцией:

После того, как  мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции .

Начинаем решать.  Оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем всю функцию в скобки и ставим справа вверху штрих:



**Сначала** находим производную внешней функции  (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что   **Все табличные шаблоны применимы и в том случае, если «икс» заменить любой дифференцируемой функцией **. В данном примере ВМЕСТО «икс» у нас :



Обратите внимание, что внутренняя функция  не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно очевидно, что 

Результат применения формулы  в чистовом оформлении выглядит так:



Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:



Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:


Пример 3

Найти производную функции 

Как всегда записываем:


Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения  при . Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: , значит, многочлен  – и есть внутренняя функция:

И, только потом выполняется возведение в степень , следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

Согласно формуле , сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: . Повторяем еще раз: **любой табличный шаблон справедлив не только для «икс», но и для любой дифференцируемой функции **. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции   следующий:



Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции , внутренняя функция  у нас не меняется:

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:



Пример 5

а) Найти производную функции 



б) Найти производную функции 



Пример 6

Найти производную функции 

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени . Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:



Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции :



Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:



 Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать.

 (В механике координаты х и у часто выражают через время)

## Параметрическое представление функции

Предположим, что функциональная зависимость *y* от *x* не задана непосредственно *y = f(x)*, а через промежуточную величину — *t*. Тогда формулы x=φ(t);   y=ψ(t) задают параметрическое представление функции одной переменной. Если предположить, что обе эти функции φ и ψ имеют производные и для φ существует обратная функция θ, явное представление функции выражается через параметрическое как: y=ψ(θ(x))=f(x)) и производная функции может быть вычислена как y′(x)=dy/dx=y′(t)/x′(t).

 Близкое понятие — **параметрическое уравнение** множества точек, когда координаты точек задаются как функции от некоторых набора свободных параметров. Если параметр один, мы получим параметрическое уравнение кривой:  x=x(t); y=y(t) (кривая на плоскости).

### *Примеры:*

Уравнение окружности имеет вид: x2+y2=r2. Параметрическое уравнение окружности:  x=rcost; ⁡ y=rsint; 0≤t<2π.

 **Параметрические уравнения эллипса.**

Теорема. Пусть  – произвольные действительные числа. Тогда [система](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) уравнений

 $\left\{\begin{array}{c}x=a\cos(t)\\y=b\sin(t )\end{array}\right. tϵ[0;2π]$

                                      задает параметрические уравнения эллипса.

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$

 **ЦИКЛОИДА**\* (от греч. kukloeides - кругообразный, круглый) - плоская трансцендентная кривая, траектория точки М окружности радиуса r, катящейся без скольжения по прямой.

|  |
| --- |
| https://graph.power.nstu.ru/wolchin/umm/gp/geom/002/kukloeides/kukloeides.gif |

Параметрическое уравнение:

x=rt - r sint,  x=r(t-sint)

y=r - r cost. y=r(1-cost)

(Поисковик Циклоида - Википедия- показано как получается линия)

**ГИПОЦИКЛОИДЫ С ЧЕТЫРЬМЯ ОСТРИЯМИ**
Уравнение в прямоугольных координатах:
x2/3 + y2/3 = a2/3

Уравнения в параметрической форме: $\left\{\begin{array}{c}x=acos^{3}t\\y=asin^{3}t\end{array}\right.$

Площадь, ограниченная кривой = 3πa2/8

Длина дуги целой кривой = 6a

Это кривая, описываемая точкой Р на окружности радиусом a/4, которая катится внутри окружности радиусом a.


**ЭПИЦИКЛОИДА**
Параметрические уравнения:


Это кривая, описываемая точкой Р на окружности радиуса b, когда она катится по внешней стороне окружности радиусом а. Кардиоида является частным случаем эпициклоиды.


**ДЕКАРТОВ ЛИСТ**
Уравнение в прямоугольных координатах:
x3 + y3 = 3axy

Параметрические уравнения:


Уравнение асимптоты: x + y + a = 0.


## Аналитическое задание функции

Функция y=f(x), x∈X задана **явным аналитическим способом**, если дана формула, указывающая последовательность математических

действий, которые надо выполнить с аргументом x, чтобы получить значение f(x) этой функции.

Пример

* y=2$x^{2}$+3x+5, x∈R;
* y= $\frac{1}{х-5 }, $x≠5;
* y= $\sqrt{х}$, x≥0.

Так, например, в физике при равноускоренном прямолинейном движении скорость тела определяется формулой  v=v0+at , а формула для перемещения s тела при равномерно ускоренном движении на промежутке времени от 0 до t записывается в виде: s=s0+$v\_{0}t+\frac{at^{2}}{2}$

Отметим, что явный аналитический способ задания функции достаточно компактен (формула, как правило, занимает немного места), легко воспроизводим (формулу нетрудно записать) и наиболее приспособлен к выполнению над функциями математических действий и преобразований.

Неявное задание функции

Функция y = f(x) задана **неявным аналитическим способом**, если дано соотношение

F(x,y)=0,           (1)

связывающее значения функции y и аргумента x. Если задавать значения аргумента, то для нахождения значения y, соответствующего конкретному значению x, необходимо решить уравнение (1) относительно y при этом конкретном значении x.

При заданном значении x уравнение (1) может не иметь решения или иметь более одного решения. В первом случае заданное значение x не принадлежит области определения неявно заданной функции, а во втором случае задает **многозначную функцию**, имеющую при данном значении аргумента более одного значения.

Отметим, что если уравнение (1) удается явно разрешить относительно y=f(x), то получаем ту же функцию, но уже заданную явным аналитическим способом. Так, уравнение  $x+y^{5}-1=0$

и равенство $y=\sqrt[5]{1-x}$ определяют одну и ту же функцию.

## ****Производная функции, заданной неявно****

## Или короче – производная неявной функции. Что такое неявная функция? Давайте сначала вспомним само [определение функции одной переменной](http://mathprofi.ru/mnozhestva.html):

**Функция одной переменной** –это правило, по которому каждому значению независимой переменной  соответствует одно и только одно значение функции .

Переменная ****называется **независимой переменной** или **аргументом**.
Переменная  называется **зависимой переменной** или **функцией**.

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в явном виде. Что это значит? Рассмотрим функцию 

Мы видим, что слева у нас одинокий «игрек», а справа – **только «иксы»**. То есть, функция  **в явном виде** выражена через независимую переменную .

Рассмотрим другую функцию: 

Здесь переменные  и  расположены «вперемешку». Причем **никакими способами невозможно** выразить «игрек» только через «икс».

  – пример **неявной функции**.

Производную от функции, заданной неявно находить не так сложно! Все правила дифференцирования, таблица производных элементарных функций остаются в силе. Разница в одном своеобразном моменте, который мы рассмотрим сейчас.

Рассмотренные ниже задания выполняются по довольно жесткому и чёткому алгоритму.

Пример 1

Найти производную от функции, заданной неявно 

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части:


2) Используем правила линейности производной


3) Непосредственное дифференцирование.
Как дифференцировать  и  совершенно понятно. Что делать там, где под штрихами есть «игреки»?

 –производная от функции равна её производной: .

Как дифференцировать 
Здесь у нас **сложная функция**. Почему? Вроде бы под синусом всего одна буква «игрек». Но, дело в том, что всего одна буква «игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ**. Таким образом, синус – внешняя функция,  – внутренняя функция. Используем правило дифференцирования сложной функции :



Произведение дифференцируем по обычному правилу :



Обратите внимание, что  – тоже сложная функция, **любой «игрек с наворотами» – сложная функция**:



Само оформление решения должно выглядеть примерно так:


Если есть скобки, то раскрываем их:


4) В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть – переносим всё остальное:


5) В левой части выносим производную  за скобки:



6) И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:



Производная найдена.

Пример 2

Найти производную от функции, заданной неявно 

Навешиваем штрихи на обе части:


Используем правила линейности:


Находим производные:



Раскрываем все скобки:


Переносим все слагаемые с  в левую часть, остальные – в правую часть:


В левой части выносим  за скобку:


Окончательный ответ:


Пример 3

Найти производную от функции, заданной неявно 

Не редкость, когда после дифференцирования возникают дроби. В таких случаях от дробей нужно избавляться. Рассмотрим еще два примера.

***Решение***:
**
**
**
**
**
**
Таким образом: **

Пример 4

Найти производную от функции, заданной неявно 

Заключаем обе части под штрихи и используем правило линейности:



Дифференцируем, используя правило дифференцирования сложной функции  и правило дифференцирования частного :




Раскрываем скобки:


Теперь нам нужно избавиться от дроби. Это можно сделать и позже, но рациональнее сделать сразу же. В знаменателе дроби находится . Умножаем каждое слагаемое каждой части на . Если подробно, то выглядеть это будет так:



 Далее алгоритм работает стандартно, после того, как все скобки раскрыты, все дроби устранены, слагаемые, где есть «игрек штрих» собираем в левой части, а в правую часть переносим всё остальное:


В левой части выносим  за скобку:


Окончательный ответ:


Пример 5

Найти производную от функции, заданной неявно 

 ***Решение***:
**
**
**
**
**
**
**

## ****Производная параметрически заданной функции****

В этом параграфе тоже всё достаточно просто. В параметрической форме функция задается двумя уравнениями: . Частенько уравнения записывают не под фигурными скобками, а последовательно: , .

**Переменная  называется параметром** и может принимать значения от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Рассмотрим, например, значение  и подставим его в оба уравнения: . Или по человечески: «если икс равен четырем, то игрек равно единице». На координатной плоскости можно отметить точку , и эта точка будет соответствовать значению параметра . Аналогично можно найти точку для любого значения параметра «тэ». Как и для «обычной» функции, для  параметрически заданной функции все права тоже соблюдены: можно построить график, найти производные и т.д.

В простейших случаях есть возможность представить функцию в явном виде. Выразим из первого уравнения параметр:  – и подставим его во второе уравнение: .

Для нахождения производной параметрической функции существует формула:



Находим производную от «игрека по переменной тэ»:


Все правила дифференцирования и таблица производных справедливы, естественно, и для буквы , таким образом, **какой-то новизны в самом процессе нахождения производных нет**. Просто мысленно замените в таблице все «иксы» на букву «тэ».

Находим производную от «икса по переменной тэ»:


Теперь только осталось подставить найденные производные в нашу формулу:


Производная, как и сама функция, тоже зависит от параметра .

Что касается обозначений, то в формуле вместо записи  можно было просто записать  без подстрочного индекса, поскольку это «обычная» производная «по икс». Но в литературе всегда встречается вариант , поэтому я не буду отклоняться от стандарта.

Пример 6

Найти производную от функции, заданной параметрически  

Используем формулу 

В данном случае:



Таким образом:


Особенностью нахождения производной параметрической функции является тот факт, что **на каждом шаге результат выгодно максимально упрощать**. Так, в рассмотренном примере при нахождении   раскрываем скобки под корнем. Велик шанс, что при подстановке  и  в формулу многие вещи хорошо сократятся. Хотя встречаются, конечно, примеры и с корявыми ответами.

Пример 7

Найти производную от функции, заданной параметрически  

***Решение***:
Используем формулу **
В данном случае:
**
**
Таким образом:
**

Для параметрически заданной функции можно найти вторую производную, и находится она по следующей формуле: . Совершенно очевидно, что для того чтобы найти вторую производную, нужно сначала найти первую производную.

Пример 8

Найти первую и вторую производные от функции, заданной параметрически  

Сначала найдем первую производную.
Используем формулу 

В данном случае:



Подставляем найденные производные в формулу. В целях упрощений используем тригонометрическую формулу :


В задаче на нахождение производной параметрической функции довольно часто в целях упрощений приходится использовать [**тригонометрические формулы**](http://mathprofi.ru/trigonometricheskie_formuly.pdf). Помните их или держите под рукой, и не пропускайте возможность упростить каждый промежуточный результат и ответы. Зачем?  Сейчас нам предстоит взять производную от  , и это явно лучше, чем находить производную от .

Найдем вторую производную.
Используем формулу: .

Посмотрим на нашу формулу. Знаменатель  уже найден на предыдущем шаге. Осталось найти числитель – производную от первой производной по переменной «тэ»: 



Осталось воспользоваться формулой:


Пример 9

Найти  и  для функции, заданной параметрически  

***Решение***: Найдем первую производную.
Используем формулу: **. В данном случае:
**
**
**
Найдем вторую производную, используя формулу **.
**
** ( $ctg3x=\frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}$)

 **Самостоятельно:**

Пример 2: Найти производную функции 

Ответ: 

Пример 4: Найти производную функции 

Ответ: ** Указание: перед дифференцированием необходимо перенести степень наверх, сменив у показателя знак ****.

Пример 7

Найти производную функции 

Ответ: 

Пример 9

Найти производную функции 

Ответ: 

Пример 11: Найти производную функции 

Ответ: 

Пример 12: Найти производную функции, заданной параметрически:

$x=\cos(\frac{t}{2})$ ; y= t – sin t (1 – cos t= 2$sin^{2}\frac{t}{2}$)

Пример 13

Найти производную функции, заданной неявно:

$$х^{3}+y^{3}-3axy=0$$

Пример 14

Найти производную третьего порядка для функции у = 4х4 + 5х3  и вычислить ее в точке х0 = -1