**Производные высших порядков**

Производная 1 порядка (первая производная):

Производная второго порядка (вторая производная-производная от первой производной):

Производные третьего, четвертого порядка?

или

**СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ**

Что означают слова "задать функцию"? Они означают: объяснить всем желающим, о какой конкретной функции идёт речь. Причём, объяснить чётко и однозначно!

Как это можно сделать? Как задать функцию?

Можно написать формулу. Можно нарисовать график. Можно составить табличку. Любой способ - это какое-то правило, по которому можно узнать значение игрека для выбранного нами значения икс. Т.е. "задать функцию", это значит - показать закон, правило, по которому икс превращается в игрек.

**Аналитический способ задания функции.**

Самый универсальный и могучий способ. *Функция, заданная аналитически,* это функция, которая задана *формулами.*  Знакомые всем функции, например: *y = 2x,* или*y = x2* и т.д. заданы именно аналитически.

Не всякая формула может задавать функцию. Не в каждой формуле соблюдается жёсткое условие из [определения функции.](http://helpmatan.ru/index.php#opr) А именно - *на каждый икс может быть только****один****игрек.* Например, в формуле *у = ±х*, для **одного** значения х=2, получается **два** значения у: +2 и -2. Нельзя этой формулой задать однозначную функцию.

Чем хорош аналитический способ задания функции? Тем, что если у вас есть формула - вы знаете про функцию **всё!** Вы можете составить табличку. Построить график. Исследовать эту функцию по полной программе. Точно предсказать, где и как будет вести себя эта функция. Весь математический анализ стоит именно на таком способе задания функций.

**Табличный способ задания функции.**

Как следует из названия, этот способ представляет собой простую табличку. В этой таблице каждому значению икс соответствует какое-то значение игрека. В первой строчке - значения аргумента. Во второй строчке - соответствующие им значения функции, например:  
Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | - 3 | - 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| y | 5 | 2 | - 4 | - 1 | 6 | 5 |

В данном примере игрек зависит от икса *как попало.* Нет никакой закономерности. Ничего страшного, так бывает.

Можно составить *другую* табличку, в которой будет закономерность. Этой табличкой будет задана *другая* функция, например:

Таблица 2.

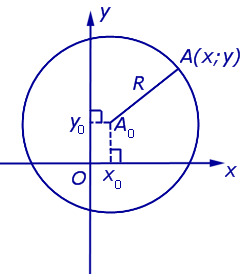
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | - 3 | - 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| y | - 6 | - 2 | 0 | 4 | 6 | 8 |

Уловили закономерность? Здесь все значения игрека получаются умножением икса на двойку. Вот и первый "хитрый" вопрос: можно ли функцию, заданную с помощью Таблицы 2, считать функцией *у = 2х*?

Чем хорош *табличный способ задания функции?* Да тем, что считать ничего не надо. Всё уже посчитано и написано в таблице. А более ничего хорошего нет. Мы не знаем значения функции для иксов, **которых нет в таблице.** В этом способе такие значения икса просто **не существуют.**  Мы не можем узнать, как ведёт себя функция за пределами таблицы. Ничего не можем. Да и наглядность в этом способе оставляет желать лучшего... Для наглядности хорош графический способ.

### Графический способ задания функции.

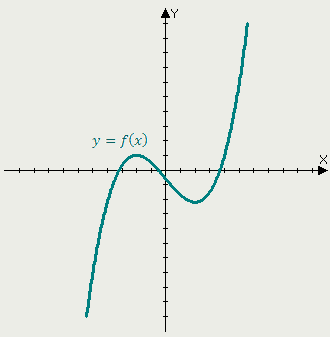
В данном способе функция представлена графиком. По оси абсцисс откладывается аргумент (х), а по оси ординат - значение функции (у). По графику тоже можно выбрать любой х и найти соответствующее ему значение у. График может быть любой, но... не какой попало. Мы работаем только с однозначными функциями. В [определении такой функции](http://helpmatan.ru/index.php#opr) чётко сказано: каждому х ставится в соответствие **единственный** у. **Один** игрек, а не два, или три... Для примера, посмотрим на окружность:



Окружность, как окружность... Почему бы ей не быть графиком функции? А давайте найдем, какой игрек будет соответствовать значению икса, например, х0? Этому икс соответствует **два** значения игрека.

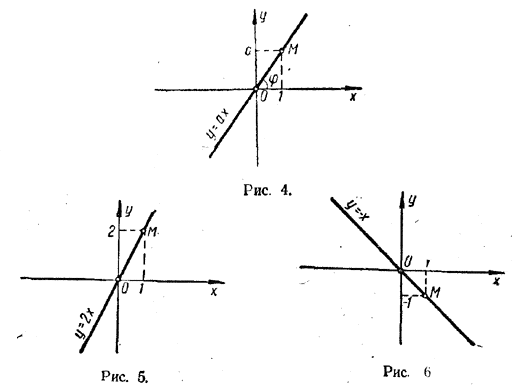
Стало быть, такой график не будет графическим заданием функции. На **один** икс приходится **два** игрека. Не соответствует этот график определению функции.

Но если условие однозначности выполнено, график может быть совершенно любым. Например:



 Эта самая кривулина - и есть закон, по которому можно перевести икс в игрек. Однозначный. Захотелось нам узнать значение функции для х = 4, например. Надо найти четвёрку на оси иксов и посмотреть, какой игрек соответствует этому иксу. Наводим мышку на рисунок и видим, что значение функции у для х=4 равно 0. Какой формулой задано такое превращение икса в игрек - мы не знаем. И не надо. Графиком всё задано. **Перечислите основные свойства.**

Теперь можно вернуться к "хитрому" вопросу про у=2х. Построим график этой функции. Вот он:



Разумеется, при рисовании этого графика мы не брали бесконечное множество значений х. Взяли несколько значений, посчитали у, составили табличку - и всё готово! Самые грамотные вообще всего два значения икс взяли!

Но мы **совершенно точно знали,** что икс может быть **любым.** Целым, дробным, отрицательным... Любым. Это по формуле у=2х видно. Поэтому смело соединили точки на графике сплошной линией.

Если же функция будет нам задана Таблицей 2, то значения икса нам придётся брать **только из таблицы.** Ибо другие иксы (и игреки) нам не даны, и взять их негде. Нет их, этих значений, в данной функции. График получится **из отдельных точек.**

Вот и ответ на "хитрый" вопрос. Функция, заданная Таблицей 2 и функция у=2х - **разные.**

Графический способ хорош своей наглядностью. Сразу видно, как ведёт себя функция, где возрастает, где убывает. По графику сразу можно узнать некоторые важные характеристики функции. А уж в теме с производной, задания с графиками - сплошь и рядом!

Вообще, аналитический и графический способы задания функции идут рука об руку. Работа с формулой помогает построить график. А график частенько подсказывает решения, которые в формуле и не заметишь.

### Словесное описание функции.

Функцию можно задать **алгоритмическим** (или программным) способом, который широко используют при вычислениях на ЭВМ.

Наконец, можно отметить **описательный** (или словесный) способ задания функции, когда правило соответствия значений функции значениям аргумента выражено словами.

Например, функцию [x]=m  ∀x∈[m,m+1), m∈Z, называемую **целой частью** x, описывают обычно словами: «Наибольшее целое число, не превосходящее x».

Функцию можно вполне однозначно задать словами. Великий и могучий русский язык на многое способен! Скажем, функцию у=2х можно задать следующим словесным описанием: каждому действительному значению аргумента х ставится в соответствие его удвоенное значение. Вот так! Правило установлено, функция задана.

Более того, словесно можно задать функцию, которую формулой задать крайне затруднительно, а то и невозможно. Например: каждому значению натурального аргумента х ставится в соответствие сумма цифр, из которых состоит значение х. Например, если х=3, то у=3. Если х=257, то у=2+5+7=14. И так далее. Формулой это записать проблематично. А вот табличку легко составить. И график построить. Кстати, график забавный получается. Попробуйте.

Способ словесного описания - способ достаточно экзотичный. Но иногда встречается. Нужно просто понимать смысл слов **"функция задана..."** Вот он, этот смысл:

**Если есть закон однозначного соответствия между х и у - значит, есть функция. Какой закон, в какой форме он выражен - формулой, табличкой, графиком, словами, песнями, плясками - сути дела не меняет. Этот закон позволяет по значению икса определить соответствующее значение игрека. Всё.**

Задание 1:

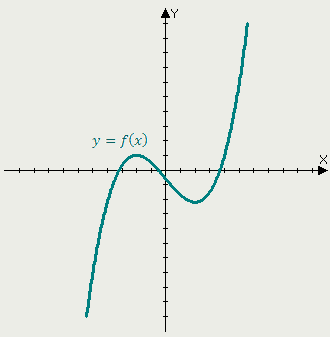
*Функция у = f(x) задана Таблицей 1:*  
Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | - 3 | - 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| y | 5 | 2 | - 4 | - 1 | 6 | 5 |

*Функция у = g(x) задана Таблицей 2:*  
Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | - 3 | - 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| y | - 6 | - 2 | 0 | 4 | 6 | 8 |

*Найти значение функции p(4), если p(х)= f(x) - g(x)*



Функция задана графиком. Решить неравенство

Надо решить неравенство, которое (в привычной форме) блистательно отсутствует! Остаётся либо бросать задание, либо включить голову. Выбираем второе и рассуждаем.

Что значит решить неравенство? Это значит, найти все значения икс, при которых выполняется данное нам условие f(x) > 4. Т.е. все значения функции (у) должны быть больше четырех. На графике игрек всякий есть... И больше 4 есть, и меньше.

**Сложная функция –**функция от функции.

Если *z* – функция от *у*, т.е. *z*(*y*), а *у*, в свою очередь, – функция от *х*, т.е. *у*(*х*), то функция *f*(*x*) = *z*(y(x)) называется *сложной функцией* (или *композицией*, или *суперпозицией функций*) от *х*.

В такой функции *х* – *независимая*, а *у* – *промежуточная переменная*. При этом сложная функция определена для тех значений независимой переменной, для которых значения промежуточной функции *у* входят в область определения функции *z*(*y*).

Пример: y=sin x, y=x2, y=2x – простые функции

y=sin x2, y= - сложные функции.

Производная дифференцируемой сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточной функции по независимому аргументу:

http://school-collection.edu.ru/dlrstore-wrapper/eba4d01c-86e9-4a55-8561-6af1337bcef5/1.gif.

Рассмотрим произвольную функцию, например, такую:

f(x)=x^5

Заметим, что аргумент x, стоящий в правой  и левой части уравнения функции - это одно и то же число, или выражение.

Вместо переменной x мы можем поставить, например, такое выражение: cosx+sinx. И тогда мы получим функцию

f(cosx+sinx)={(cosx+sinx)}^5.

Назовем выражение cosx+sinx промежуточным аргументом, а функцию f - внешней функцией. Это не строгие математические понятия, но они помогают уяснить смысл понятия сложной функции.

Чтобы найти производную сложной функции, нужно

1. Определить, какая функция является внешней и найти по таблице производных соответствующую производную.

2. Определить промежуточный аргумент.

В этой процедуре наибольшие затруднения вызывает нахождение внешней функции. Для этого используется простой алгоритм:

а. Запишите уравнение функции.

b. Представьте, что вам нужно вычислить значение функции при каком-то значении х. Для этого вы подставляете это значение х в уравнение функции и производите арифметические действия. То действие, которое вы делаете последним и есть внешняя функция.

Например, в функции

y=5^{{sin}^2{x}}  последнее действие  - возведение числа 5 в степень (сложная показательная фунkция)

Найдем производную этой функции. Для этого запишем промежуточный аргумент

{sin}^2{x} как Delta

Получим {(5^{Delta})}prime

Ищем в [таблице производных](https://ege-ok.ru/2012/01/31/kak-nayti-proizvodnuyu-tablitsa-proizvodnyih/)  производную показательной функции:

{(a^x)}prime={a^x}ln{a}

Получим:

{(5^{Delta})}prime={(5^{Delta})}ln5{Delta}prime={(5^{{sin}^2{x}})}ln5{({sin}^2{x})}prime     (1)

Теперь наша задача найти производную функции {sin}^2{x}

Заметим, что здесь мы опять имеем дело со сложной функцией. В этом выражении последнее действие - возведение в квадрат, а промежуточный аргумент {sin}{x}.

Получаем:

{({sin}^2{x})}prime=2{sin}{x}*{({sin}{x})}prime=

Смотрим в [таблице производных](https://ege-ok.ru/2012/01/31/kak-nayti-proizvodnuyu-tablitsa-proizvodnyih/) производную синуса:

{({sin}{x})}prime={cos}{x}

Получаем:

2{sin}{x}*{({sin}{x})}prime=2{sin}{x}*{({cos}{x})}

Подставим полученное значение производной в выражение (1):

{(5^{Delta})}prime={(5^{Delta})}ln5{Delta}prime={(5^{{sin}^2{x}})}ln5{({sin}^2{x})}prime={(5^{{sin}^2{x}})}ln5*2{sin}{x}*{({cos}{x})}

И, наконец, упростим выражение, вспомнив формулу синуса двойного аргумента:

{(5^{{sin}^2{x}})}ln5*2{sin}{x}*{{cos}{x}}={(5^{{sin}^2{x}})}ln5*{sin}{2x}

Таким образом,

{(5^{{sin}^2{x}})}prime={(5^{{sin}^2{x}})}ln5*{sin}{2x}

Пример 1

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image012.gif

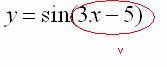
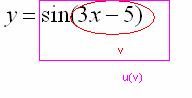
Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image014.gif, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя.

В данном примере понятно, что функция http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image012_0000.gif – это сложная функция, причем многочлен http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image014_0000.gif является внутренней функцией (вложением), а http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image019.gif – внешней функцией.

**Первый шаг**, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image019_0000.gif понятно, что под синус вложен многочлен http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image014_0001.gif. А как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике.

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image021.gif при http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image023.gif (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно будет выполнить следующее действие: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image025.gif, поэтому многочлен http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image014_0002.gif и будет внутренней функцией http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image008_0002.gif:  
   
**Во вторую очередь** нужно будет найти http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image029.gif, поэтому синус – будет внешней функцией:  
  
После того, как  мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0000.gif.

Начинаем решать.  Оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем всю функцию в скобки и ставим справа вверху штрих:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image033.gif

**Сначала** находим производную внешней функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image035.gif (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image037.gif  **Все табличные шаблоны применимы и в том случае, если «икс» заменить любой дифференцируемой функцией http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image008_0002.gif**. В данном примере ВМЕСТО «икс» у нас http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image014.gif:  
  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image039.gif

Обратите внимание, что внутренняя функция http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image041.gif не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно очевидно, что http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image043.gif

Результат применения формулы http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0001.gif в чистовом оформлении выглядит так:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image045.gif

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

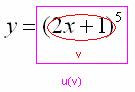
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image047.gif

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image049.gif

Пример 3

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image053.gif

Как всегда записываем:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image055.gif

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image057.gif при http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image023_0000.gif. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image059.gif, значит, многочлен http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image061.gif – и есть внутренняя функция:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image063.jpg  
И, только потом выполняется возведение в степень http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image065.gif, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:  
  
Согласно формуле http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0002.gif, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image070.gif. Повторяем еще раз: **любой табличный шаблон справедлив не только для «икс», но и для любой дифференцируемой функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image008_0002.gif**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции  http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0003.gif следующий:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image072.gif

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image035_0000.gif, внутренняя функция http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image008_0003.gif у нас не меняется:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image076.jpg  
Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image078.gif

Пример 5

а) Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image082.gif

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image084.gif

б) Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image086.gif

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image088.gif

Пример 6

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image090.gif

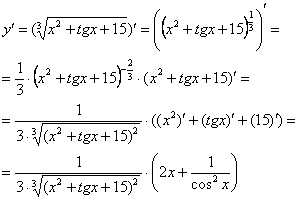
Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image092.gif. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image094.gif

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0004.gif:



Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:



Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать.

(В механике координаты х и у часто выражают через время)

## Параметрическое представление функции

Предположим, что функциональная зависимость *y* от *x* не задана непосредственно *y = f(x)*, а через промежуточную величину — *t*. Тогда формулы x=φ(t);   y=ψ(t) задают параметрическое представление функции одной переменной. Если предположить, что обе эти функции φ и ψ имеют производные и для φ существует обратная функция θ, явное представление функции выражается через параметрическое как: y=ψ(θ(x))=f(x)) и производная функции может быть вычислена как y′(x)=dy/dx=y′(t)/x′(t).

Близкое понятие — **параметрическое уравнение** множества точек, когда координаты точек задаются как функции от некоторых набора свободных параметров. Если параметр один, мы получим параметрическое уравнение кривой:  x=x(t); y=y(t) (кривая на плоскости).

### *Примеры:*

Уравнение окружности имеет вид: x2+y2=r2. Параметрическое уравнение окружности:  x=rcost; ⁡ y=rsint; 0≤t<2π.

**Параметрические уравнения эллипса.**

Теорема. Пусть http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag15/image060.gif – произвольные действительные числа. Тогда [система](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) уравнений

                                      задает параметрические уравнения эллипса.

**ЦИКЛОИДА**\* (от греч. kukloeides - кругообразный, круглый) - плоская трансцендентная кривая, траектория точки М окружности радиуса r, катящейся без скольжения по прямой.

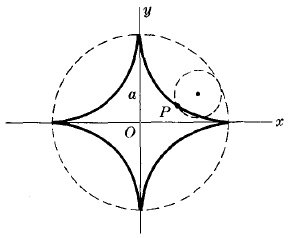
|  |
| --- |
| https://graph.power.nstu.ru/wolchin/umm/gp/geom/002/kukloeides/kukloeides.gif |

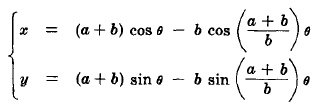
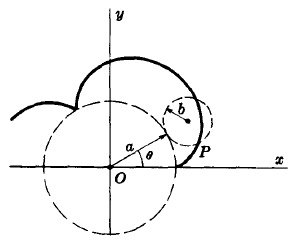
Параметрическое уравнение:

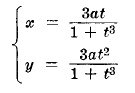
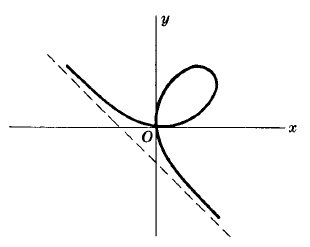
x=rt - r sint,  x=r(t-sint)

y=r - r cost. y=r(1-cost)

(Поисковик Циклоида - Википедия- показано как получается линия)

**ГИПОЦИКЛОИДЫ С ЧЕТЫРЬМЯ ОСТРИЯМИ**  
Уравнение в прямоугольных координатах:  
x2/3 + y2/3 = a2/3  
  
Уравнения в параметрической форме:   
  
  
Площадь, ограниченная кривой = 3πa2/8  
  
Длина дуги целой кривой = 6a  
  
Это кривая, описываемая точкой Р на окружности радиусом a/4, которая катится внутри окружности радиусом a.  


**ЭПИЦИКЛОИДА**  
Параметрические уравнения:  
  
  
Это кривая, описываемая точкой Р на окружности радиуса b, когда она катится по внешней стороне окружности радиусом а. Кардиоида является частным случаем эпициклоиды.  


**ДЕКАРТОВ ЛИСТ**  
Уравнение в прямоугольных координатах:  
x3 + y3 = 3axy  
  
Параметрические уравнения:  
  
  
  
Уравнение асимптоты: x + y + a = 0.  


## Аналитическое задание функции

Функция y=f(x), x∈X задана **явным аналитическим способом**, если дана формула, указывающая последовательность математических

действий, которые надо выполнить с аргументом x, чтобы получить значение f(x) этой функции.

Пример

* y=2+3x+5, x∈R;
* y= x≠5;
* y= , x≥0.

Так, например, в физике при равноускоренном прямолинейном движении скорость тела определяется формулой  v=v0+at , а формула для перемещения s тела при равномерно ускоренном движении на промежутке времени от 0 до t записывается в виде: s=s0+

Отметим, что явный аналитический способ задания функции достаточно компактен (формула, как правило, занимает немного места), легко воспроизводим (формулу нетрудно записать) и наиболее приспособлен к выполнению над функциями математических действий и преобразований.

Неявное задание функции

Функция y = f(x) задана **неявным аналитическим способом**, если дано соотношение

F(x,y)=0,           (1)

связывающее значения функции y и аргумента x. Если задавать значения аргумента, то для нахождения значения y, соответствующего конкретному значению x, необходимо решить уравнение (1) относительно y при этом конкретном значении x.

При заданном значении x уравнение (1) может не иметь решения или иметь более одного решения. В первом случае заданное значение x не принадлежит области определения неявно заданной функции, а во втором случае задает **многозначную функцию**, имеющую при данном значении аргумента более одного значения.

Отметим, что если уравнение (1) удается явно разрешить относительно y=f(x), то получаем ту же функцию, но уже заданную явным аналитическим способом. Так, уравнение

и равенство  определяют одну и ту же функцию.

## ****Производная функции, заданной неявно****

## Или короче – производная неявной функции. Что такое неявная функция? Давайте сначала вспомним само [определение функции одной переменной](http://mathprofi.ru/mnozhestva.html):

**Функция одной переменной**http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image002.gif –это правило, по которому каждому значению независимой переменной http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004.gif соответствует одно и только одно значение функции http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006.gif.

Переменная **http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004_0000.gif**называется **независимой переменной** или **аргументом**.  
Переменная http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0000.gif называется **зависимой переменной** или **функцией**.

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в явном виде. Что это значит? Рассмотрим функцию http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image008.gif

Мы видим, что слева у нас одинокий «игрек», а справа – **только «иксы»**. То есть, функция http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0001.gif **в явном виде** выражена через независимую переменную http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004_0001.gif.

Рассмотрим другую функцию: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image012.gif

Здесь переменные http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004_0002.gif и http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0002.gif расположены «вперемешку». Причем **никакими способами невозможно** выразить «игрек» только через «икс».

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image012_0001.gif – пример **неявной функции**.

Производную от функции, заданной неявно находить не так сложно! Все правила дифференцирования, таблица производных элементарных функций остаются в силе. Разница в одном своеобразном моменте, который мы рассмотрим сейчас.

Рассмотренные ниже задания выполняются по довольно жесткому и чёткому алгоритму.

Пример 1

Найти производную от функции, заданной неявно http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image012_0002.gif

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image020.gif

2) Используем правила линейности производной   
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image022.gif

3) Непосредственное дифференцирование.  
Как дифференцировать http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image024.gif и http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image026.gif совершенно понятно. Что делать там, где под штрихами есть «игреки»?

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image028.gif –производная от функции равна её производной: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image030.gif.

Как дифференцировать http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image032.gif  
Здесь у нас **сложная функция**. Почему? Вроде бы под синусом всего одна буква «игрек». Но, дело в том, что всего одна буква «игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ**. Таким образом, синус – внешняя функция, http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0003.gif – внутренняя функция. Используем правило дифференцирования сложной функции http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image035.gif:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image037.gif

Произведение дифференцируем по обычному правилу http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image039.gif:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image041.gif

Обратите внимание, что http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image043.gif – тоже сложная функция, **любой «игрек с наворотами» – сложная функция**:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image045.gif

Само оформление решения должно выглядеть примерно так:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image047.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image049.gif  
Если есть скобки, то раскрываем их:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image051.gif

4) В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть – переносим всё остальное:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image053.gif

5) В левой части выносим производную http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image055.gif за скобки:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image057.gif

6) И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image059.gif

Производная найдена.

Пример 2

Найти производную от функции, заданной неявно http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image075.gif

Навешиваем штрихи на обе части:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image077.gif

Используем правила линейности:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image079.gif

Находим производные:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image081.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image083.gif

Раскрываем все скобки:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image085.gif

Переносим все слагаемые с http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image055_0000.gif в левую часть, остальные – в правую часть:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image088.gif

В левой части выносим http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image055_0001.gif за скобку:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image090.gif

Окончательный ответ:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image092.gif

Пример 3

Найти производную от функции, заданной неявно http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image094.gif

Не редкость, когда после дифференцирования возникают дроби. В таких случаях от дробей нужно избавляться. Рассмотрим еще два примера.

***Решение***:  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image205.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image207.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image209.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image211.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image213.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image215.gif*  
Таким образом: *http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image217.gif*

Пример 4

Найти производную от функции, заданной неявно http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image096.gif

Заключаем обе части под штрихи и используем правило линейности:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image098.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image100.gif

Дифференцируем, используя правило дифференцирования сложной функции http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image035_0000.gif и правило дифференцирования частного http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image102.gif:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image104.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image106.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image108.gif

Раскрываем скобки:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image110.gif

Теперь нам нужно избавиться от дроби. Это можно сделать и позже, но рациональнее сделать сразу же. В знаменателе дроби находится http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image112.gif. Умножаем каждое слагаемое каждой части на http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image112_0000.gif. Если подробно, то выглядеть это будет так:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image114.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image116.gif

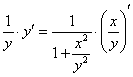
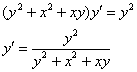
Далее алгоритм работает стандартно, после того, как все скобки раскрыты, все дроби устранены, слагаемые, где есть «игрек штрих» собираем в левой части, а в правую часть переносим всё остальное:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image122.gif

В левой части выносим http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image055_0002.gif за скобку:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image124.gif

Окончательный ответ:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image126.gif

Пример 5

Найти производную от функции, заданной неявно http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image128.gif

***Решение***:  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image219.gif*  
**  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image223.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image225.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image227.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image229.gif*  
**

## ****Производная параметрически заданной функции****

В этом параграфе тоже всё достаточно просто. В параметрической форме функция задается двумя уравнениями: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image130.gif. Частенько уравнения записывают не под фигурными скобками, а последовательно: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image132.gif, http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image134.gif.

**Переменная http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image136.gif называется параметром** и может принимать значения от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Рассмотрим, например, значение http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image138.gif и подставим его в оба уравнения: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image140.gif. Или по человечески: «если икс равен четырем, то игрек равно единице». На координатной плоскости можно отметить точку http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image142.gif, и эта точка будет соответствовать значению параметра http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image138_0000.gif. Аналогично можно найти точку для любого значения параметра «тэ». Как и для «обычной» функции, для  параметрически заданной функции все права тоже соблюдены: можно построить график, найти производные и т.д.

В простейших случаях есть возможность представить функцию в явном виде. Выразим из первого уравнения параметр: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image144.gif – и подставим его во второе уравнение: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image146.gif.

Для нахождения производной параметрической функции существует формула:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image148.gif

Находим производную от «игрека по переменной тэ»:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image150.gif

Все правила дифференцирования и таблица производных справедливы, естественно, и для буквы http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image136_0000.gif, таким образом, **какой-то новизны в самом процессе нахождения производных нет**. Просто мысленно замените в таблице все «иксы» на букву «тэ».

Находим производную от «икса по переменной тэ»:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image153.gif

Теперь только осталось подставить найденные производные в нашу формулу:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image155.gif

Производная, как и сама функция, тоже зависит от параметра http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image136_0001.gif.

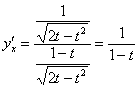
Что касается обозначений, то в формуле вместо записи http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image157.gif можно было просто записать http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image055_0003.gif без подстрочного индекса, поскольку это «обычная» производная «по икс». Но в литературе всегда встречается вариант http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image157_0000.gif, поэтому я не буду отклоняться от стандарта.

Пример 6

Найти производную от функции, заданной параметрически  http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image160.gif

Используем формулу http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image148_0000.gif

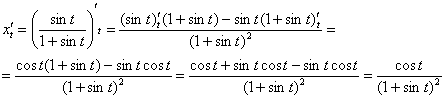
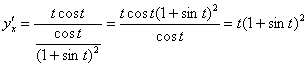
В данном случае:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image162.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image164.gif

Таким образом:  


Особенностью нахождения производной параметрической функции является тот факт, что **на каждом шаге результат выгодно максимально упрощать**. Так, в рассмотренном примере при нахождении http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image168.gif  раскрываем скобки под корнем. Велик шанс, что при подстановке http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image170.gif и http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image168_0000.gif в формулу многие вещи хорошо сократятся. Хотя встречаются, конечно, примеры и с корявыми ответами.

Пример 7

Найти производную от функции, заданной параметрически  http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image172.gif

***Решение***:  
Используем формулу *http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image148_0002.gif*  
В данном случае:  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image233.gif*  
**  
Таким образом:  
**

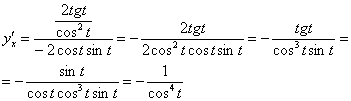
Для параметрически заданной функции можно найти вторую производную, и находится она по следующей формуле: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image174.gif. Совершенно очевидно, что для того чтобы найти вторую производную, нужно сначала найти первую производную.

Пример 8

Найти первую и вторую производные от функции, заданной параметрически  http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image176.gif

Сначала найдем первую производную.  
Используем формулу http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image148_0001.gif

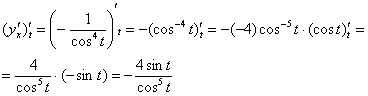
В данном случае:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image178.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image180.gif

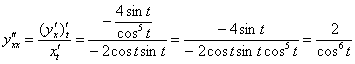
Подставляем найденные производные в формулу. В целях упрощений используем тригонометрическую формулу http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image182.gif:  


В задаче на нахождение производной параметрической функции довольно часто в целях упрощений приходится использовать [**тригонометрические формулы**](http://mathprofi.ru/trigonometricheskie_formuly.pdf). Помните их или держите под рукой, и не пропускайте возможность упростить каждый промежуточный результат и ответы. Зачем?  Сейчас нам предстоит взять производную от  http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image186.gif, и это явно лучше, чем находить производную от http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image188.gif.

Найдем вторую производную.  
Используем формулу: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image174_0000.gif.

Посмотрим на нашу формулу. Знаменатель http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image170_0000.gif уже найден на предыдущем шаге. Осталось найти числитель – производную от первой производной по переменной «тэ»: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image192.gif



Осталось воспользоваться формулой:  


Пример 9

Найти http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image157_0001.gif и http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image199.gif для функции, заданной параметрически  http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image201.gif

***Решение***: Найдем первую производную.  
Используем формулу: *http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image148_0003.gif*. В данном случае:  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image240.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image242.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image244.gif*  
Найдем вторую производную, используя формулу *http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image174_0001.gif*.  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image247.gif*  
*http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image249.gif* ( )

**Самостоятельно:**

Пример 2: Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image051.gif

Ответ: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image169.gif

Пример 4: Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image080.gif

Ответ: *http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image171.gif* Указание: перед дифференцированием необходимо перенести степень наверх, сменив у показателя знак **http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image173.gif**.

Пример 7

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image100.gif

Ответ: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image175.gif

Пример 9

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image114.gif

Ответ: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image177.gif

Пример 11: Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image145.gif

Ответ: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image179.gif

Пример 12: Найти производную функции, заданной параметрически:

; y= t – sin t (1 – cos t= 2)

Пример 13

Найти производную функции, заданной неявно:

Пример 14

Найти производную третьего порядка для функции у = 4х4 + 5х3  и вычислить ее в точке х0 = -1