1. **Исторические сведения**

Понятие числа имеет свою многовековую историю. Число, как и все научные понятия, возникло в результате практических нужд человека. Понятие о числе возникло в доисторические времена в связи с необходимостью счета различных предметов. Поэтому первоначально рассматривались лишь целые положительные числа, которые называют *натуральными* и обозначают буквой N. В этом множестве всегда возможны операции сложения и умножения.

Потребность более точных измерений таких величин, как площадь, вес, время привели к дроблению основной единицы меры на мелкие части, так появились дробные числа. Целое число – частный случай дроби. Целые и дробные числа образуют класс *рациональных* чисел – Q.

Задачи измерения непрерывных величин привели к введению чисел иррациональных . Исторически «открытие» иррациональных чисел приписывается Пифагору, который обнаружил несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной.

Позже начали появляться отрицательные числа. Систематическое применение отрицательных чисел в общих формулах и их использование в качестве коэффициентов алгебраических уравнений одновременно с введением нуля впервые встречается у индусов (VI – XI век). Индусам же принадлежит и правильное толкование отрицательных чисел и действий с ними на примерах простейших направленных величин, таких как прибыль-убыток, перемещение в противоположных направлениях и т.п. В XVI веке Декарт дал геометрическое истолкование отрицательных чисел как направленных отрезков.

Числа рациональные и иррациональные, положительные и отрицательные получили общее название *действительных* или вещественных чисел R. Геометрически действительные числа изображаются точками числовой оси – прямой, на которой указано положительное направление, начальная точка и масштаб.

Исторически понятие комплексного числа появилось как расширение понятия действительного числа в связи с решением алгебраических уравнений. В общем случае на множестве R некоторые алгебраические уравнения не имеют корней, в то время как в пространстве комплексных чисел любое алгебраическое уравнение n-ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Первое упоминание о мнимых числах как о корнях квадратных из отрицательных чисел относится еще к XVI веку. В 1545 г. итальянский ученый Кардано (1501-1576) опубликовал работу, в которой, пытаясь решить уравнение x3 – 12x + 16 = 0, он пришел к выражению. Через это выражение представлялись действительные корни x1 = x2=2 и x3 = -4. Таким образом, в работе Кардано мнимые числа появились как промежуточные члены в вычислении.

С середины XVIII века Даламбер, Эйлер и Лагранж с успехом используют функции комплексного переменного для решения некоторых задач гидродинамики. С помощью функций комплексного переменного решаются задачи о составлении географических карт, ряда чисто математических задач. Правила сложения и вычитания комплексных чисел совпадают с соответствующими правилами для векторов.

Векторная интерпретация широко используется для изображения гармонических колебаний, переменных синусоидальных токов и напряжений. Комплексные числа нашли широкое применение в электроэнергетических расчетах, в частности, при анализе режимов работы электрических систем. Теория функций комплексного переменного является одной из основных в прикладной математике.

**Решение квадратного уравнения ах2 + вх + с = 0**

**D = b2 – 4ac; ; 1) D > 0 →**

**2) D = 0 → ;**

**3) D < 0 → ?**

1. **Определение комплексного числа.**

**Действия над комплексными числами**

Многие задачи прикладного характера сводятся к решению квадратных уравнений, которые на множестве действительных чисел не всегда решаются, поэтому и появилась необходимость нового понятия: √-1 = i – *мнимая единица*. Символ i от слова imaginarius (мнимый) ввел Эйлер (1777 г). И тогда решение уравнения

x2 + 9 = 0, x2 = -9, , x = ± 3 i

Так как : √-1 = i, то i2 = -1; i3 = - i; i4 = 1.

Число *z = a + bi (a,b € R)* называют *комплексным числом*.

*a = Re z* – действительная часть числа z,

*b = Im z* - мнимая часть числа z.

При *а = 0* число *z = bi* – мнимое число; при *b = 0* число *z = a* - действительное число, т.е. комплексные числа являются расширением понятия числа, в новом множестве к существующим операциям добавляется возможность извлечения квадратного корня из отрицательных чисел. Чисто комплексным числом называют пару действительных чисел *(x, y)*, записанных в определенном порядке: *z = (x,y)*. Поэтому комплексные числа принято изображать вектором с началом в начале координат, а конец в точке (х,у)

Обозначение *z = x + yi*  называют *алгебраической формой* записи комплексного числа z.

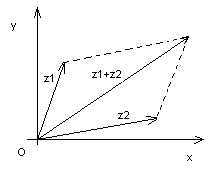
Комплексные числа *a + bi* и *x + yi* считаются *равными*, если *а = х* и *b = y*.

Два комплексных числа *z = a + bi* и , отличающиеся только знаками при мнимой части, называют *сопряженными*.

Числа *a + bi* и -*a – bi* называют *противоположными*.

С комплексными числами в алгебраической форме легко выполняются арифметические действия:

1) z1 + z2 = (a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i

Сложение комплексных чисел, изображенных векторами, производится по правилу сложения векторов:

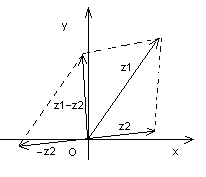


Рис. 1

Рис. 2

2) z1∙z2 = (a + bi)∙(x + yi) = ax + ayi + bxi + byi2 = (ax – by) +(ay + bx)i

[i2 = -1]

Геометрически комплексные числа изображают в виде точки М (х, у) или вектора  на числовой плоскости. Ось *Ох* называют действительной осью; *Оу* – мнимой осью, а плоскость *Оху* – комплексной плоскостью (z).

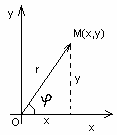


Рис. 3

Точку *М (х,у)* называют аффиксом числа z.

Модуль вектора *ОМ* называют модулем комплексного числа:

│ОМ│=│z│= r; r = 

Угол *φ* между действительной осью *Ох* и *ОМ* называют *аргументом* комплексного числа z:

*φ = Arg z*. Значение аргумента, заключенное в промежутке –*π < φ ≤ π* (или *0< φ ≤ 2π*), называется *главным значением аргумента*

(обозначается *φ0 = arg z*).

Т.к. *x = r cos φ, а y = rsinφ*, то *φ = φ0+ 2πk, k € Z.*

Если отсчет ведется против хода часовой стрелки, то угол считается положительным, а если по движению часовой стрелки – отрицательным.

z = x + yi = rcos +i rsin = r(cos + isin)

Запись такого вида называют *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Эйлер, рассматривая дифференциальное уравнение свободного гармонического колебания, получил его частное решение в двух различных видах: *2cosx и exi+e-xi*. Впоследствии установил:

.

При интегрировании линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами Эйлер вывел формулу

exi = cosx + isinx

Комплексное число записанное в виде *z = r∙eφ∙i* называется *показательной формой* записи.

В тригонометрической (показательной) форме комплексные числа удобно перемножать, возводить в степень, извлекать корень:

т.е. при перемножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

3)

4) где k = 0,…,n-1

5)

6)

**Пример** 1. Выполнить действия с комплексными числами

z1 = 2 + 3i и z2 = 4 – 2i

а) z1 + z2 = 6 + i

б) z1 - z2 = (2 – 4) + (3 – (-2))i = -2 + 5i

в) z1 ∙z2 = (2 + 3i)∙(4 – 2i) = 8 – 4i + 12i - 6i2 = 8 + 8i + 6 = 14 + 8i (i2 = -1)

г)

**Пример** 2. Найти множество точек координатной плоскости Оху, изображающих комплексные числа z, для которых

|z + i – 2| ≤ 2.

Решение: Запишем число z в алгебраической форме

z = x + iy, тогда

z + i – 2 = x + iy + i – 2 = (x – 2) + (y+1)i.

│z + i - 2│= и неравенство примет вид

≤ 2 ↔ (х – 2)2 + (у + 1)2 ≤ 22.

Множество точек плоскости, удовлетворяющих этому неравенству, представляет собой все точки, лежащие внутри окружности и на окружности с центром в точке (2, -1) и радиусом 2.

**Пример** 3. Найти действительные числа х и у из уравнения (2х – 5i) + (7y + 2xi) = -23 + 3yi

Решение: Преобразуем левую часть к виду

(2x + 7y) + (-5 + 2x)i = -23 + 3yi.

По условию равенства комплексных чисел получим систему:

 или  .

**Пример** 4. Вычислить .

Решение: Пусть  (x, y € R)

-15 + 8i = (x + iy)2

-15 + 8i = x2 + 2xyi – y2

 .

Решение системы:

 и 

Тогда А1 = -1 – 4i и A2 = 1 + 4i , т.е. .

**Пример** 5. Выполнить действия:

а)

.

b) .

c)

При k=0 .

При k=1

**Пример 6**. Найти:

**7. Вычислить** a=1-действительная часть, b=-мнимая часть,

то ,

=

**8. Найти действительные решения уравнения**:

(1 + i)x + ( -2 + 5i)y = -4 + 17i

(x – 2y) + (x + 5y)i = -4 + 17i

Вычтем первое уравнение из второго, получим 7у = 21, значит у = 3. Тогда из первого уравнения можно найти х = 2.

Ответ: (2; 3)

1. **Найти модуль и главное значение аргумента. Записать число в тригонометрической и показательной формах: .**

a= -2; b = 2 **→**

1. **Вычислить:**

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Найти модуль и главное значение аргумента. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

а) -2

б) 2i

в) -√2 + i√2

д) 1 - i√3

е) (1 – i)/(1 + i)

**2.** Вычислить:

а) (1 + i√3)9

б) 

в) .

3. Найти:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) (1 + i√3)3

4. Найти действительные решения уравнений:

а) (3x – i)(2 + i) + (x – iy)(1 + 2i) = 5 +6i

б) (3 – 2i)x + (4 + 3i)y = 14 + 2i

в) 

е) 9 + 2ix + 4yi =10i + 5x – 6y

ж) -2 + 5xi – 3yi = 9i + 2x – 4y.

з) найти все корни уравнения (8 корней).