**Дифференциал функции**

Пусть функция y=f(x) дифференцируема в точке x, то есть приращение этой функции можно представить в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно Δx и нелинейного членов:

Δy=f′(x)⋅Δx+α(Δx)⋅Δx

где α(Δx)→0 при Δx→0

Определение:

**Дифференциалом** функции называется линейная относительно Δx часть приращения функции. Она обозначается как dy или df(x). Таким образом:

dy=f′(x)⋅Δx

Замечание 1:

Дифференциал функции составляет основную часть ее приращения.

Замечание 2:

Наряду с понятием дифференциала функции вводится понятие дифференциала аргумента. По определению дифференциал аргумента есть [приращение аргумента](https://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_1.php):

**dx=Δx**

Формулу для дифференциала функции можно записать в виде:

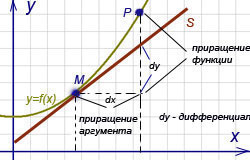
dy=f′(x)dx

Отсюда получаем, что

Итак, это означает, что производная может быть представлена как обыкновенная дробь - отношение дифференциалов функции и аргумента.

**Понятие** и **геометрический смысл дифференциала**

**Дифференциалом** функции в некоторой точке x называется главная часть приращения функции. **Дифференциал** функции y = f(x) равен произведению её производной на приращение независимой переменной x (аргумента).



**Пример 1.** Найти дифференциалы функций:

1) ; 

2) ; 

3) ; 

4) . 

**Пример 2.** Найти дифференциал функции



в точке x = 2, по формуле.

**Пример 3.** Найти дифференциал функции



в точке x.

**Пример 4.** Найти дифференциал функции

в точках x = 0 и x = 1.

**Свойства дифференциала**

Дифференциал обладает свойствами, аналогичными свойствам производной:

 (С – постоянная величина)






Одно из особенных свойств дифференциала - [инвариантность формы дифференциала в случае сложных функций](https://function-x.ru/differential2.html).

**Применение дифференциала в приближенных вычислениях (**Δy=f′(x)⋅Δx+α(Δx)⋅Δx α → 0, Δx→0 )



Или

позволяет использовать дифференциал для приближенных вычислений значений функции.

**Пример 5.** Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно ln 1,01.

Решение. Число ln 1,01 является одним из значений функции *y* = ln *x*. Формула в данном случае примет вид

Положим

Тогда ,

что является очень хорошим приближением: табличное значение ln 1,01 = 0,0100.

**Пример 6.**Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно

Решение. Число   
   
является одним из значений функции

Так как производная этой функции

то формула примет вид

Полагая

и

получаем

(табличное значение

).

**Абсолютная и относительная погрешности приближенных вычислений**

Пользуясь приближенным значением числа, нужно иметь возможность судить о степени его точности. С этой целью вычисляют его абсолютную и относительную погрешности.

Абсолютная погрешность  приближенного числа равна абсолютной величине разности между точным числом и его приближенным значением:



Относительной погрешностью приближенного числа называется отношение абсолютной погрешности этого числа к абсолютной величине соответствующего точного числа:



Если точное число неизвестно, то

Иногда, прежде чем применить формулу, требуется предварительно преобразовать исходную величину. Как правило, это делается в двух целях. Во-первых, надо добиться, чтобы величина была достаточно малой по сравнению с , так как чем меньше , тем точнее результат приближенного вычисления. Во-вторых, желательно, чтобы величина вычислялась просто.

**Пример 8.**Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно . Оценить точность полученного результата.

Решение. Рассмотрим функцию

Её производная равна

а формула (11) примет вид



В данном случае было бы нерационально вычислять приближенно следующим образом:



так как значение



не является малым по сравнению со значением производной в точке



Здесь удобно предварительно вынести из под корня некоторое число, например 4/3.  Тогда



Теперь, полагая



получим



Умножая на 4/3, находим



Принимая табличное значение корня



за точное число, оценим по формулам (12) и (13) абсолютную и относительную погрешности приближенного значения:



Точки перегиба и интервалы выпуклости – вогнутости графика.

1. Функция называется выпуклой вверх (выпуклой), если ее график лежит ниже любой своей касательной. Вторая производная функции в интервале выпуклости меньше нуля.
2. График функции называется выпуклым вниз (вогнутым), если он лежит выше любой своей касательной. Вторая производная функции в интервале выпуклости больше нуля.
3. Точка, в которой функция меняет направление выпуклости, называется точкой перегиба. В этой точке производная второго порядка равна нулю.

**Алгоритм исследования функции с помощью производной**

1. Найти область определения. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности.(
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты. Исследовать поведение на бесконечности.
9. Выбрать дополнительные точки и вычислить их координаты.
10. Построить график и асимптоты.

**Пример 1:** *Провести полное исследование и построить график функции*

Область определения функции. Так как функция представляет собой дробь, нужно найти нули знаменателя.

x=0,⇒x=1.

Исключаем единственную точку x=1 из области определения функции и получаем: D(y)=(−∞;1)∪(1;+∞).

Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва. Найдем односторонние пределы:



Так как пределы равны бесконечности, точка x=1 является разрывом второго рода, **прямая x=1- вертикальная асимптота.**

Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем x=0:



Таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты **(0;8).**

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox, для чего положим y=0:

 Уравнение не имеет корней, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

Заметим, что любых x. Поэтому при x∈(−∞;1) функция y>0 (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при x∈(1;+∞) функция y<0 (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

Функция не является ни четной, ни нечетной т.к.

Функция не является периодической, так как представляет собой дробно-рациональную функцию.

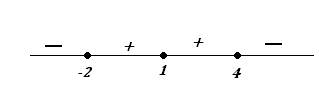
Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки (в которых y′=0):

D=36

Получили три критические точки: x=−2,x=1(точка разрыва),x=4. Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При x∈(−∞;−2),(4;+∞) производная y′<0, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При x∈(−2;1),(1;4)  производная y′>0, функция возрастает на данных

промежутках.

При этом x=−2 - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), x=4 - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Найдем значения функции в этих точках:

4 -8

Таким образом, точка минимума (−2;4), точка максимума (4;−8).

Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:


Приравняем вторую производную к нулю:



Полученное уравнение не имеет корней, поэтому точек перегиба нет. При этом когда , то есть функция вогнутая. Когда , то есть функция выпуклая.

Исследуем поведение функции на бесконечности, то есть при .



Так как пределы бесконечны, горизонтальных асимптот нет.

Попробуем определить наклонные асимптоты вида y=kx+b. Вычисляем значения k, b по известным формулам:



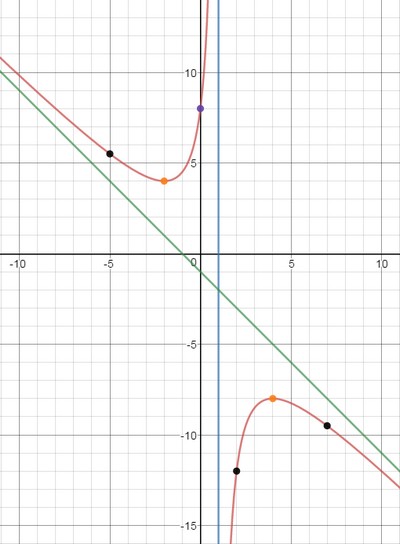


Получили, у что функции есть одна наклонная асимптота y=−x−1.

Дополнительные точки. Вычислим значение функции в некоторых других точках, чтобы точнее построить график.

y(−5)=5.5; y(2)=−12; y(7)=−9.5.

По полученным данным построим график, дополним его асимптотами x=1 (синий),   y=−x −1 (зеленый) и отметим характерные точки (фиолетовым пересечение с осью ординат, оранжевым экстремумы, черным дополнительные точки):



**Пример 2:**

**Провести полное исследование функции и построить её график**.  
http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image186.gif

**Решение**:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой: .

http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image190.gif, значит,  данная функция является нечетной, её график симметричен относительно начала координат.

Очевидно, что функция непериодическая.

2) Асимптоты, поведение функции на бесконечности.

Так как функция непрерывна на **R**, то вертикальные асимптоты отсутствуют

Для функции, содержащей экспоненту, типично **раздельное** исследование «плюс» и «минус бесконечности», однако нашу жизнь облегчает как раз симметрия графика – либо и слева и справа есть асимптота, либо её нет. Поэтому оба бесконечных предела можно оформить под единой записью. В ходе решения используем [**правило Лопиталя**](http://mathprofi.ru/pravila_lopitalya.html):  
http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image193.gif

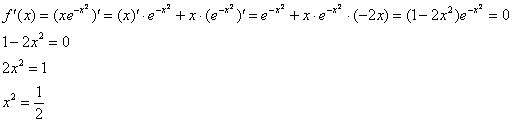
Прямая http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image195.gif (ось http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image028_0000.gif) является горизонтальной асимптотой графика  при http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image198.gif.

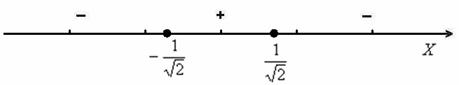
Из непрерывности на  R  и существования горизонтальной асимптоты следует тот факт, что функция ограничена сверху и ограничена снизу.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства.

Здесь тоже сокращаем решение:  
График http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image202.gif проходит через начало координат.

Других точек пересечения с координатными осями нет. Более того, интервалы знакопостоянства очевидны, и ось можно не чертить: http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image204.gif, а значит, знак функции зависит только от «икса»:  
http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image206.gif, если http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image208.gif;  
http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image210.gif, если http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image212.gif.

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.  
   
http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image216.gif – критические точки.

Точки симметричны относительно нуля, как оно и должно быть.  
  
Определим знаки производной:  
  
Функция возрастает на интервале http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image220.gif и убывает на интервалах http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image222.gif

В точке http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image224.gif функция достигает максимума: http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image226.gif.

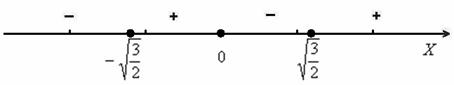
В силу свойства http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image228.gif (нечётности функции) минимум можно не вычислять:  
http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image230.gif

Если у вас возникло недопонимание каких-либо моментов, нужно начертить в тетради координатные оси и с карандашом в руках заново проанализировать каждый вывод задания.

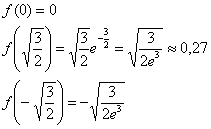
5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.  
http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image239.gif

http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image241.gif – критические точки.

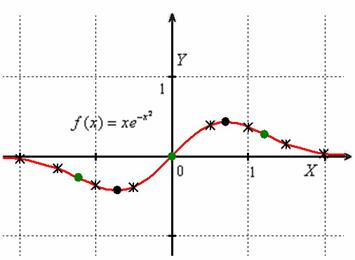
Симметрия точек сохраняется.

Определим знаки http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image243.gif:  
  
График функции является выпуклым на http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image247.gif и вогнутым на http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image249.gif.

Выпуклость/вогнутость на крайних интервалах подтвердилась.

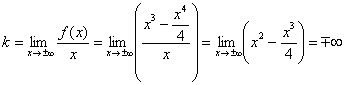
Во всех критических точках существуют перегибы графика. Найдём ординаты точек перегиба, при этом снова сократим количество вычислений, используя нечётность функции:  


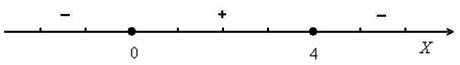
6) Дополнительные точки целесообразно рассчитать только для правой полуплоскости:  
http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image253.jpg

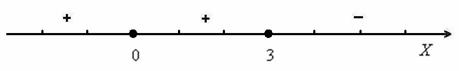
Выполним чертёж:  


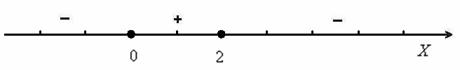
**Пример 3:  Проведём исследование функции:**

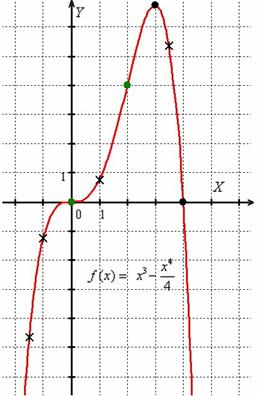
***Решение***:  
1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, .  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image257.gif*  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image259.gif*, значит, данная функция не является четной или нечетной.  
Функция непериодическая.

2) Асимптоты графика, поведение функции на бесконечности.  
Так как функция непрерывна на *R*, то вертикальные асимптоты отсутствуют.  
**, значит,  наклонные асимптоты также отсутствуют.  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image263.gif*, функция не ограничена снизу.

3) Точки пересечения графика с координатными осями.  
График *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0003.gif* проходит через начало координат.  
С осью *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image265.gif*  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image267.gif*  
Определим знаки *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0004.gif*:  
**  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image271.gif*, если *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image273.gif*,  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image210_0000.gif*, если *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image276.gif*.

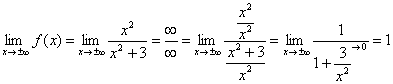
4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image278.gif*   
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image280.gif* – критические точки.  
Определим знаки *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image282.gif*:  
**  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0005.gif* возрастает на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image287.gif* и убывает на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image289.gif*.  
В точке *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image291.gif* функция достигает максимума: *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image293.gif*

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image295.gif*   
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image297.gif* – критические точки.  
Определим знаки *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image243_0000.gif*:  
**  
График функции является выпуклым на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image168_0000.gif* и вогнутым на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image170_0000.gif*.  
В обеих критических точках существуют перегибы графика.  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image303.gif*

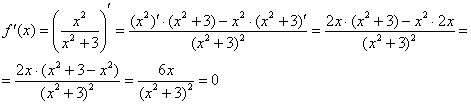
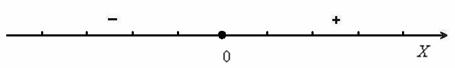
6) Найдем дополнительные точки:  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image305.jpg*  
Выполним чертёж:  
**

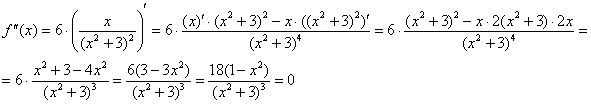
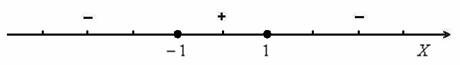
**Пример 4**: Проведем исследование функции:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, .  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image311.gif*  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image313.gif*, значит, данная функция является четной, ее график симметричен относительно оси ординат.  
Очевидно, что функция непериодическая.

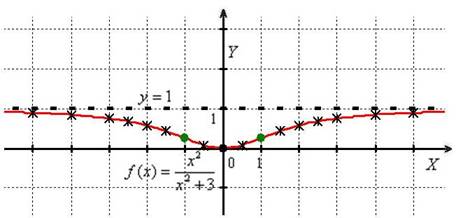
2) Асимптоты, поведение функции на бесконечности.  
Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальные асимптоты отсутствуют.  
**  
Прямая *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image317.gif*  является горизонтальной асимптотой для графика *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0006.gif* при *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image138_0000.gif*.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.  
График функции проходит через начало координат.  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image319.gif* на всей области определения.

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.  
**  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image122_0005.gif* – критическая точка.  
Определим знаки *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image163_0000.gif*:  
**  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0007.gif* возрастает на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image327.gif* и убывает на  *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image329.gif*.  
В точке *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image331.gif* функция достигает минимума: *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image333.gif*.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.  
**  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image337.gif* – критические точки.  
Определим знаки *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image339.gif*:  
**  
График *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0008.gif* является выпуклым на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image343.gif* и вогнутым на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image345.gif*.  
В обеих критических точках существуют перегибы графика: *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image347.gif*.

6) Найдем дополнительные точки и выполним чертёж:  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image349.jpg*

**

**Пример 5: Найти угловой коэффициент касательной к графику функции** f(x) = 3х2+40х -10 в точке х0 = -1.

**Пример 6: Напишите уравнение касательной** к графику функции f(x) = x2 - 2x +3 в точке с абсциссой х0= - 2.

Угловой коэффициент

Уравнение касательной: , где

**Пример 7: Определить интервалы возрастания и убывания** функции у = х3 –24х.

Решение: Находим производную

Рисуем числовую прямую, отмечаем полученные точки и находим знаки производной в каждом интервале (самостоятельно). Получаем знаки +, -, +. Значит, функция возрастает при убывает.

**Пример8: Найти наибольшее значение** функции *f(x)=х3 -3х2 + 2* на отрезке *[-2; 3].*

Решение: 3x(x- 2) = 0 → x1=0, x2 = 2 – обе точки входят в заданный интервал. Находим значения функции в найденных точках и на концах интервала, выбираем самое большое и самое маленькое значения.

у(0) = 03- 3\*02 + 2 = 2,

у(2) = 23 – 3\*22 + 2 = 8 – 12 + 2 = - 2,

у(-2) = (-2)3 – 3\*(-2)2 + 2 = -8 – 12 + 2 = - 18, - наименьшее**.**

у(3) = 33 – 3\*32 +2 = 27 – 27 + 2 = 2. **у(0) = у(3) = 2 – наибольшее.**

**Задачи для самостоятельного решения**:

1. Найдите дифференциал функции:

а)  б)

в)  г) 

д) 

1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции f(x) = 4 - x2 в точке х0 = -3.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции f(x) = x2 - 2x в точке с абсциссой х0=-2.
3. Определить интервалы возрастания и убывания функции *у = 3х3- 9х.*
4. Исследовать функцию и построить график *f(x) = 12х –3х2 + 2х3.*
5. Исследовать функцию и построить график f(x) = х4 –4х3.

**(в 5, 6 найти интервалы монотонности, экстремумы, интервалы выпуклости и вогнутости)**

1. Найти наибольшее значение функции *f(x) =*  на отрезке *[0,5; 2].*
2. **Вычислить приближенно самостоятельно:**

**Пример 7.** Вычислить приближенно:

1)  (0.514)

2)  (0.99)

**Критерии оценки:**

* **оценка «отлично» выставляется студенту, если все задания выполнены правильно;**
* **оценка «хорошо» - если правильно выполнено 75 % заданий;**
* **оценка «удовлетворительно» - если правильно выполнено 50 % заданий;**
* **оценка «неудовлетворительно» - если выполнено менее 40 % заданий.**