**Линейные однородные дифференциальные уравнения 2ого порядка с постоянными коэффициентами.**

**Y” + py’ +qy =0 (1),** где р и q –постоянные действительные числа.

Чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно найти какие-нибудь два линейно независимых решения.

Функции u(x) и v(x) называются линейно независимыми, если $\frac{u(x)}{v(x)}\ne const$

Для уравнения (1) составляется характеристическое уравнение

k2+pk + q =0 (2)

Общее решение уравнения (1) составляется в виде:

1. Если дискриминант уравнения (2) положителен, то есть уравнение имеет два различных действительных корня к1 ≠ к2, то общее решение уравнения (1) имеет вид: $у=С\_{1}е^{к\_{1}х}+С\_{2}е^{к\_{2}х}$.
2. Если D=0, то к1=к2=к и решение будет иметь вид: $у=е^{кх}\left(С\_{1}+С\_{2}х\right)$
3. **Если** $D<0, k\_{1.2}=α\pm βi$**, то решение будет иметь вид:**

 **Y=** $e^{αx}\left(C\_{1}\cos(βx)+C\_{2}\sin(βx)\right)$

**Примеры: 1. Y”+y’-2y=0, характеристическое уравнение k2+k-2=0 D=1-4\*(-2)=9**$ >0$

 $k\_{1.2}=\frac{-1\pm 3}{2} k\_{1}=-2, k\_{2}=1$ y=$C\_{1}e^{-2x}+C\_{2}e^{x}$

$$ $$

1. **Y”+2y+5y=0 → k2 + 2k +5=0 → D=4-20=-16 →** $k\_{1.2}=\frac{-2\pm \sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}= -1\pm 2i α=-1, β=2$

$y=e^{-1x}\left(C\_{1}\cos(2x)+C\_{2}\sin(2x)\right)$- общее решение данного уравнения.

$3$. Y” + 9y =0 → k2+9=0 → k= $\pm \sqrt{-9}=\pm 3i α=0, β=3$

$y=e^{0}\left(C\_{1}\cos(3x)+C\_{2}\sin(3x)\right)= C\_{1}\cos(3x)+C\_{2}\sin(3x)$ – общее решение.

 4. Y”- 4y’ + 4y=0 → k2 - 4k +4 =0 → (k-2)2=0 → k1= k2=2

 $y=e^{2x}\left(C\_{1}+C\_{2}x\right)$ – общее решение.

 5. $y^{IV}-y=0$ → k4 – 1 = 0 → (k - 1)(k + 1)(k2 + 1) = 0 → $k=\pm 1, k=\pm i$ $y=C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{-x}+C\_{3}\cos(x)+C\_{4}\sin(x)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

 6. Решить д.у. с начальными условиями.

$$y"-4y'+3y=0 ; y(0) =6; y'(0) =4$$

1. k2- 4k + 3 = 0 - характеристическое уравнение

k1 = 1, k2 = 3

1. Y= $C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{3x}$ – общее решение данного д.у.
2. Y’= $C\_{1}e^{x}+3C\_{2}e^{3x}$ – производная общего решения
3. $\left\{\begin{array}{c}y\left(0\right)=6\\y^{'}\left(0\right)=4\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}6=C\_{1}e^{0}+C\_{2}e^{0}\\4=C\_{1}e^{0}+3C\_{2}e^{0}\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{c}6=C\_{1}+C\_{2}\\4=C\_{1}+3C\_{2}\end{array}\right.$$

Вычтем первое уравнение из второго, получим -2=2С2 → С2= -1, тогда С1=7

Подставим найденные значения в общее решение, получим

Y=7ex - e3x – частное решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

Решить самостоятельно:

1. Y”-5y’+6y=0 y(0) =3, y’(0)=1/2
2. Y” -2y’+5y=0 y(0)=-3, y’(0)=-1/5
3. Y”-4y’+4y=0

Подробнее искать в интернете.