**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.**

1. Основные понятия.

***ОПР.*** Уравнение вида F(x, y , y/, y//, …, yn) = 0, где х – независимая переменная, у – искомая функция, а y/, y//, .. – ее производные, называется *дифференциальным уравнением*.

*Порядок* дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей производной.

***ОПР.*** Если искомая функция является функцией одной переменной у(х), то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

***ОПР.*** Если искомая функция является функцией двух и более независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением *в частных производных*.

При решении дифференциальных уравнений прибегают к интегрированию – решение находится с точностью до произвольной постоянной:$$

у/(х) = f(x) y = ∫ f(x)dx = F(x) + C - общее решение

Геометрически общее решение представляет собой множество интегральных кривых.

Чтобы из множества решений выделить одно (выделить кривую, проходящую через заданную точку) задают начальные условия:

у(х0) = у0.

***ОПР.*** Решение, которое удовлетворяет начальным условиям, называется решением *задачи Коши*.

ПРИМЕРЫ линейных однородных д.у. второго порядка.

***ОПР.***  Уравнение вида у// + ру/ + qy = f(x) **(2.2)**, где *p* и *q* – вещественные числа, f(x) – непрерывная функция, называется *неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Общее решение представляет собой сумму ***у = у0 + у̃***

***у0*** – общее решение соответствующего однородного уравнения;

***у̃*** – частное решение неоднородного уравнения.

*Метод решения.* Если правая часть уравнения (2.2) имеет «специальный вид», то применяется метод неопределенных коэффициентов. По виду правой части f(x) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами. Находят первую, вторую производную и подставляют в уравнение (2.2). Из полученного тождества находят значения коэффициентов.

***ỹ для различных видов правых частей уравнения f(x)***

|  |  |
| --- | --- |
| 1. f(x) = Pn(x)

Pn(x) – многочлен степени *n* | у̃ = Qn(x)·xrQn(x) – многочлен той же степени,  что и Pn(x)r – число корней характеристического уравнения, равных 0. |
| 1. f(x) = eα·x Pn(x)
 | у̃ = Qn(x)·xr· eα·xQn(x) – многочлен той же степени, что и Pn(x)r – число корней характеристического уравнения, равных α. |
| 1. f(x) = a cos(βx) + b sin(βx)
 | у̃ = (A cos(βx) + B sin(βx))·xr·A, B – неизвестные коэффициентыr – число корней характеристического уравнения, равных iβ. |
| 1. f(x) = eα·x (Pn(x) cos(βx) + Pm(x) sin(βx))
 | у̃ = eα·x (Q1(x) cos(βx) +Q2(x) sin(βx))·xr·Q1, Q2 – многочлены степени s = min(n, m)r – число корней характеристического уравнения, равных α + iβ. |

***REM.***  Если правая часть содержит только одну из тригонометрических функций, частное решение содержит обе функции.

***Т.*** Решение *у̃* уравнения у// + ру/ + qy = f1(x) + f2(x) может быть представлено в виде

*у̃ = у̃1 + у̃2,* где *у̃1* – решение уравнения у// + ру/ + qy = f1(x),

а *у̃2* - решение уравнения у// + ру/ + qy = f2(x).

ПРИМЕРЫ. Найти у0 и у̃.





5) Найти общее, частное и частное решение, соответствующее заданным начальным условиям.

$$y"-4y'+3y=-x^{2}+3x; y\left(0\right)=3, y'\left(0\right)=\frac{4}{3}$$

а) решим соответствующее однородное уравнение:

$$y"-4y'+3y =0$$

$$k^{2}-4k+3=0$$

 $k\_{1}=1, k\_{2}=2 y\_{0}=C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{2x}$- общее решение однородного уравнения.

 Б) Найдем частное решение неоднородного уравнения

Правая часть $f\left(х\right)=-x^{2}+3x$ - многочлен второй степени, значит частное решение ищем в виде полного многочлена второй степени с неопределенными коэффициентам, т. е .$\overbar{y}=Ax^{2}+Bx+C$

 $y^{'}=2Ax+B, y"= 2A$ –подставляем в данное уравнение $2A-4\left(\left(2Ax+B\right)\right)+3\left(Ax^{2}+Bx+C\right)=-x^{2}+3x $

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях х в левой и правой частях уравнения.

2A - 8Ax – 4B +3Ax2 +3Bx + 3C = - x2+3x

$$\left.\left\{\begin{array}{c}х^{2}\\х^{1}\\х^{0}\end{array}\right.\right|\left\{\begin{array}{c}3A=-1 A=\frac{-1}{3}\\-8A+3B=3 B=\frac{1}{9}\\2A-4B+3C=0 C= \frac{10}{27}\end{array}\right.$$

Значит частное решение имеет вид:

$$\overbar{y}=-\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{9}x+\frac{10}{27}$$

Тогда общее решение $y=y\_{0}+\overbar{y}=C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{2x}-\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{9}x+\frac{10}{27}$

$$y^{'}=C\_{1}e^{x}+2C\_{2}e^{2x}-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$$

$$\left\{\begin{array}{c}y\left(0\right)=3, 3=C\_{1}+C\_{2}+\frac{10}{27}, C\_{1}+C\_{2}=\frac{71}{27}\\y^{'}\left(0\right)=\frac{4}{3} , \frac{4}{3}=C\_{1}+2C\_{2}+\frac{1}{9}, C\_{1}+2C\_{2}=\frac{11}{9}\end{array}, \right.$$

$$C\_{1}=\frac{109}{27}, C\_{2}=-\frac{38}{27}. y=\frac{109}{27}e^{x}-\frac{38}{27}e^{2x}-\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{9}x+\frac{10}{27}$$

Ответ: $y\_{0}=C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{2x}$- общее решение однородного уравнения.

 $y=y\_{0}+\overbar{y}=C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{2x}-\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{9}x+\frac{10}{27}$ –общее решение данного неоднородного дифференциального уравнения

 $y=\frac{109}{27}e^{x}-\frac{38}{27}e^{2x}-\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{9}x+\frac{10}{27}$- частное решение данного неоднородного д.у., соответствующее заданным начальным условиям.

Решить дифференциальные уравнения:

1. $y"-4y'+3y=e^{5x}, y\left(0\right)=3, y'\left(0\right)=9$
2. $y"-6y'+9y=9x^{2}-12x+2, y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=3$
3. $y"+2y'-8y=3\sin(x), y\left(0\right)=-1, y'\left(0\right)=-\frac{3}{2}$
4. $y"-4y'+5y=5x^{2}-4, $