**Задачи, приводящие к д.у.**

Понятие дифференциального уравнения — ключевое для приложений математики к различным областям естествознания и, в особенности, к физике и механике. Дифференциальные уравнения описывают движение тел в силовых полях (например, заряда в электромагнитном поле), динамику жидкостей и газов (например, атмосферы и океана, без чего не возможно предсказание погоды), распространение тепла и многое другое.

1. **Задача о распаде радия**. Экспериментальным путем установлено, что скорость распада радиоактивного вещества (скорость изменения его массы в единицу времени) прямо пропорциональна его количеству. Найти закон изменения массы, если m(t0=0)=m0.

Решение: Пусть при t= t0 масса m= m0;

- средняя скорость распада за время

- мгновенная скорость распада;

По условию

m0=Ce0, → C = m0,

Экспериментально установлено, что k = 0,000447 (для радия), Т – период полураспада.

1. В комнате, где температура равна 20С, некоторое тело остыло за 20 мин. От 100 до 60С. Найти **закон охлаждения тела**; через сколько минут оно остынет до 30? (повышением температуры в комнате пренебречь).

Решение:

По закону Ньютона (скорость охлаждения пропорциональна разности температур)

,

1. **Локомотив движется** по горизонтальному пути со скоростью 72 км/час. За сколько времени и на каком расстоянии он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса.

Решение:

По второму закону Ньютона

- д.у. второго порядка, допускающее понижение порядка.

t0 = 0, v0 = 72км/час =20м/сек → C1 = 20.

V = 20 – 0.2qt (м/с) S = 20t – 0.1qt(м)

При v = 0 найдем время торможения

При t = 10.2 сек S = 20\*10.2 – 0.1\*9.8\*10.22 102(м)

1. **Пуля, двигаясь** со скоростью v0=400 м/c, углубляется в достаточно толстую стенку. Сила сопротивления сообщает пуле ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости. Найти скорость пули через 0,001сек. После вхождения пули в стенку, если коэффициент пропорциональности к= 7м-1.

Решение:

- д.у. первого порядка с разделяющимися переменными.

По условию при t0 = 0 V0 = 400 м/с →

400 = 1/C → C = 1/400 = 0.0025

- закон изменения скорости в зависимости от времени.

**м/сек.**

**Задача 5.** Скорость химической реакции, при которой разлагается данное вещество, пропорциональна количеству неразложившегося вещества. Через час после начала реакции осталось 36 г неразложившегося вещества, а через 3 часа – 9 г. Сколько было вещества первоначально?

Решение. Обозначим переменное количество еще не разложившегося вещества в момент t через x, а искомое начальное его количество – через x0 . Легко видеть, что x есть функция времени t: x = f( t).

Скорость v реакции, т.е. скорость изменения функции t, пропорциональна количеству x неразложившегося вещества: v= kx ; но v - не что иное, как , следовательно: откуда . Интегрируем: потенцируя, получим .

Так как при t = 1 x = 36 , а при t = 3 x = 9 , следовательно, a .

Получена система двух уравнений с двумя неизвестными С и k. Разделим второе уравнение на первое уравнение: ; извлекая квадратный корень, найдем =0.5. Подставляя значение в уравнение, найдем С:. Теперь равенство примет вид: ). Для отыскания x0 надо положить в равенстве t=0; получим  **грамма.**

**Задача 6.** При движении лодки в спокойной воде сопротивление вызывает замедление, пропорциональное скорости движения. Моторная лодка движется в момент остановки мотора со скоростью 200 м/мин., а через ½ мин. – уже со скоростью 100 м/мин. С какой скоростью она будет двигаться через 2 мин.? Решение. Для решения этой задачи скорость x движения лодки выразим как функцию времени t : x = f (t).

Закон, указанный в задаче, устанавливает прямую пропорциональную зависимость между ускорением a и скоростью x движения лодки: a=- kx , где k – положительный коэффициент пропорциональности. Знак «-» в равенстве указывает, что ускорение a замедляет движение, т.е. имеет знак, обратный знаку скорости x. Известно, что , таким образом мы получили дифференциальное уравнение первого порядка с переменными x и t, которое после разделения переменных легко интегрируется:

Таков общий интеграл уравнения. Но следует еще найти k и C, воспользовавшись условиями данной задачи. Начальная скорость движения лодки известна из условия: 200 м/мин. при t=0 и скорость 100 м/мин. при t=1/2. Подставим эти две пары частных значений x и t в равенство Подставляя t=0, x=200, найдем: 200=C. Подставляя t=1/2, x=100, C =200, найдем , откуда 1=2 . Возводя обе части полученного равенства в квадрат, получим 1= 4 Отсюда можно было бы найти k путем логарифмирования. Но нам удобнее искать не k, а заменить в равенстве . Произведя замену и помня, что с=200, представим равенство в таком виде:

Это и есть частный интеграл уравнения, удовлетворяющий всем условиям данной задачи, т.е. как раз та функция, которую нужно было найти. Остается ответить на вопрос, какова будет скорость лодки через 2 мин. после остановки мотора. Положим для этой цели t=2 в равенстве, найдем м/мин. С помощью равенства можно найти скорость лодки в любой момент времени.

**Задача 7**. В резервуаре объемом 100 л находится рассол, содержащий 10 кг растворенной соли. В резервуар втекает вода со скоростью 2 л/мин., а смесь вытекает из резервуара с той же скоростью, причем концентрация (т.е. количество соли в 1 л) поддерживается равномерной путем постоянного перемешивания. Сколько соли остается в растворе по истечении 50 мин.?

Решение. Обозначим количество соли в резервуаре в какой-либо момент времени t через x. Очевидно, что эта величина зависит от t: x = f(t). Количество раствора в резервуаре остается постоянным, следовательно, концентрация раствора c в момент времени t будет определяться формулой кг/л, т.е. также зависит от t. Дадим времени t небольшое приращение ∆t. В течение этого промежутка времени x получит приращение ∆x (отрицательное, так как количество соли уменьшается). Ввиду малости промежутка времени ∆t концентрацию раствора за это время можно считать постоянной и определить ее по формуле. При этом предположении за время ∆t из резервуара вытекает 2∆t литров раствора, содержащих 2c∆t кг соли. Следовательно: ∆x ≈ -2c∆t. Подставляя в равенство (1.41) значение c и переходя к дифференциалам, получим точное равенство: (1.42) Полученное дифференциальное уравнение (1.42) интегрируется разделением переменных: , откуда . Так как по условию задачи при t = 0 , т.е. в начале процесса количество соли x= 100 , то получаем ln10 = c . Следовательно: , или . (1.43) Остается ответить на вопрос, чему равно количество соли в резервуаре через 50 мин. Для этого положим в равенстве (1.43) t = 50 ; получим ≈ 3.68 кг.