Векторы

1. **Вектор. Основные понятия.**

 Величины, которые полностью определяются численным значением, называются **скалярными**. Примерами скалярных величин являются: *площадь, объем, температура, масса*.

 Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют ***векторными***. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

[*Опр.*](http://www.nature.ru/db/msg.html?mid=1176034) ***Вектор* – направленный отрезок.**

$\overbar{АВ}$ **Характеризуется длиной и направлением.**

**А (начало), В (конец)**

***Обозначения.*** Векторы обозначают жирными строчными буквами или буквами с чертой или стрелкой наверху.

 Вектор $\overbar{АВ}$ называется противоположным вектору $\overbar{ВА}$ и обозначается – ***a***.

***Длиной* вектора или *модулем* называется длина отрезка и обозначается .**

**Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается** $\overbar{0}$. Такой вектор направления не имеет. **Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* и обозначается** $\overbar{е}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора ***а,*** называется *ортом* вектора ***а***.

[***Опр.***](http://www.nature.ru/db/msg.html?mid=1176034) **Векторы, лежащие на параллельных прямых, называются *коллинеарными* (могут быть направлены одинаково или противоположно).**

$\overbar{а}\uparrow \uparrow \overbar{b}$ **- сонаправленные векторы;** $\overbar{a}\uparrow \downright \overbar{b}$ **- противоположно направленные векторы.**

[***Опр.***](http://www.nature.ru/db/msg.html?mid=1176034) **Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.**

[***Опр.***](http://www.nature.ru/db/msg.html?mid=1176034)**Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и направления, то есть** $\overbar{a}=\overbar{b} \leftrightarrow \overbar{a}\uparrow \uparrow \overbar{b} и \left|\overbar{a}\right|=\left|\overbar{b}\right|$**.**

1. **Линейные операции над векторами**

**2.1. Сложение.**

***Суммой*** $\overbar{a}+\overbar{b}$ **называется вектор, который идет из начала вектора** $\overbar{a}$ **в конец вектора** $\overbar{b}$**, при условии, что вектор b приложен к концу вектора а. Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника*.**

****

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма*:



Сумма трех

векторов:

**2.3. Произведение вектора на число.**

**Геометрический смысл:**

**При ׀k׀ > 1 вектор «растягивается» в k раз.**

**При ׀k׀ < 1 вектор «сжимается» в k раз.**

**При k < 0 вектор изменяет направление на противоположное.**

****

1. **Прямоугольная система координат на плоскости**

**Две взаимно перпендикулярные оси Ох и Оу, имеющие общее начало О и одинаковую масштабную единицу образуют *прямоугольную систему координат на плоскости*.**

**Ох – ось абсцисс, Оу – ось ординат, т.О – начало координат, Оху – координатная плоскость.**

**Выделим на координатных осях Ох и Оу единичные векторы (орты) i и j. Выберем произвольный вектор а на плоскости и совместим с началом координат: а = ОМ:**

**Тогда: ׀ОМ1׀ = прха = ах ׀ОМ2 ׀ = пруа = ау**

 **а = ОМ1 + ОМ2**

**Получим:** $\overbar{a}=a\_{x}∙\overbar{i}+a\_{y}∙\overbar{j}$

**Координатами любого вектора называются его проекции на координатные оси. Это есть разложение вектора по ортам координатных осей.**

**По теореме Пифагора:** $\left|a\right|=\sqrt{a\_{x}^{2}+a\_{y}^{2}}$ **- длина вектора в координатной форме.**



**Действия над векторами, заданными проекциями**

1. Координаты вектора $\overbar{М\_{1}М\_{2}}=\left(х\_{2}-х\_{1}; у\_{2}-у\_{1}\right)$
2. **Равенство векторов:** $\overbar{а}=\overbar{b}$**, если х1 = х2 и у1 = у2**
3. Середина отрезка: $С\left(\frac{х\_{1}+х\_{2}}{2}; \frac{у\_{1}+у\_{2}}{2}\right)$
4. $\overbar{a}+\overbar{b}$= ( х1 + х2; у1 + у2)
5. $k∙\overbar{a}=\left(k∙x\_{1};k∙y\_{1}\right)$
6. Векторы параллельны ($\overbar{a}\uparrow \uparrow \overbar{b} или \overbar{a}\uparrow \downright \overbar{b}),$ если их координаты пропорциональны:

$\frac{x\_{2}}{x\_{1}}=\frac{y\_{2}}{y\_{1}}$

$$ $$

1. Скалярным произведением векторов называют произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\overbar{a}∙\overbar{b}=\left|\overbar{a}\right|∙\left|\overbar{b}\right|∙\cos(φ)$$

В координатной форме: $\overbar{a}∙\overbar{b}=x\_{1}∙x\_{2}+y\_{1}∙y\_{2}$

1. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0

В пространстве формулы те же самые, только добавляется третья координата.





**Пример**. Даны три точки А(4;-1;3), В(2;2;2) и С(1; -2;3). Построить точки в системе координат, определить: какая из точек находится выше (ниже) других, какая точка левее (правее), какая точка дальше (ближе). Найти координаты векторов $\overbar{AB}, \overbar{BA},\overbar{CB}$, середину отрезка АС, найти вектор $\overbar{m}=3∙\overbar{AB}-2∙\overbar{BC}$.

Решение: 1) $\overbar{AB}=\left(2-4;2-\left(-1\right);2-3\right)=\left(-2;3;-1\right)$

 $\overbar{BA}=-\overbar{AB}=\left(2;-3;1\right)$ , $\overbar{CB}=\left(2-1;2—2;2-3\right)=\left(1;4;-1\right)$

2) AM=MC $M\left(\frac{4+1}{2};\frac{-1-2}{2};\frac{3+3}{2}\right)=\left(2.5;-1.5;3\right)$

$\overbar{m}=3∙\overbar{AB}-2∙\overbar{BC}$ = $3∙\left(-2;3;-1\right)-2∙\left(-1;-4;1\right)=\left(-6;9;-3\right)+\left(2;8;-2\right)=\left(-4;17;-5\right)$

3) $\overbar{AB}∙\overbar{CB}=\left(-2;3;-1\right)∙\left(1;4;-1\right)=-2∙1+3∙4+\left(-1\right)∙\left(-1\right)=11\ne 0$

Значит векторы не перпендикулярны.

4) $\frac{-2}{1}\ne \frac{3}{4}\ne \frac{-1}{-1}$ значит векторы не коллинеарны.

5) Если точки А, В, С, Д - вершины параллелограмма, то координаты точки Д(x,y,z) находим, используя равенство векторов (противолежащие стороны параллелограмма равны и параллельны)

$\overbar{ВС}=\overbar{АД} \rightarrow \left(-1;-4;1\right)= \left(x-4;y+1;z-3\right)$, так как векторы равны, то их координаты тоже равны

$$\left\{\begin{array}{c}x-4=-1 x=3\\y+1=-4 y=-5\\z-3=1 z=4\end{array}\right.$$

Д(3; -5; 4) – искомая точка.



6) Даны точки А(3;-2;1) и В(-4;5;7). Точка В – середина отрезка АС, найти координаты точки С.

Так как АВ = ВС, то вектор $\overbar{AB}=\overbar{BC}$, значит (-7; 7; 6) = (x+4; y-5; z-7)

X+4 = -7, а x = - 11, y – 5 = 7 , а y = 12, z – 7 = 6, а z = 13

C( - 11; 12; 13).

7) $\overbar{a} $= (- 5; 2k; 3), $\overbar{b}=$ (2; 7; 8). При каком значении параметра к векторы перпендикулярны?

 Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение = 0, то есть -5\*2+2к\*7+3\*8 = 0, значит 14к – 10 + 24 =0, 14к = - 14 и **к = - 1**

8) Даны точки А(-2; 5; 4), В( 2; 3 – к; 8). При каком значении параметра к расстояние между точками будет равно 6?

Решение:

$\overbar{AB} $= (2 – (- 2); 3 – к – 5; 8 – 4) $\overbar{AB} $= (4; - к – 2; 4)

$$\left|АВ\right|= \sqrt{16+\left(-к-2\right)^{2}+16}= \sqrt{32+\left(к+2\right)^{2}}=6$$

Возводим обе части в квадрат $32+\left(к+2\right)^{2}=36$

$\left(к+2\right)^{2}=36-32$ к + 2 = 2 **к = 0**

9) Известно, что $\overbar{а}$ и $\overbar{b}$ – единичные, взаимно перпендикулярные векторы.

Вычислить $\left(\overbar{a}+3\overbar{b}\right)^{2}$

Решение:

$$\left(\overbar{a}+3\overbar{b}\right)^{2}=\overbar{a}^{2}+2∙\overbar{a}∙3\overbar{b}+9\overbar{b}^{2}=1^{2}+6∙0+9∙1^{2}=10$$

$$\overbar{a}^{2}=\left|\overbar{a}\right|∙\left|\overbar{a}\right|\cos(0)=1∙1∙1=1$$

 $\overbar{a}∙\overbar{b}=\left|\overbar{a}\right|∙\left|\overbar{b}\right|∙\cos(90°)=1∙1∙0=0$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Даны точки А(2; -2; 4), В(-4; 3; 5), С(1; 3; 1 ).
2. Отметить эти точки в системе координат в пространстве (линии построения должны быть видны)!
3. Найти координаты векторов$\overbar{AB}, \overbar{ BA}, \overbar{ CB}$, $\overbar{ АС}$.
4. Найти вектор $\overbar{a}=-3∙\overbar{AC}+4∙\overbar{AB}$
5. Проверить коллинеарность и перпендикулярность векторов$\overbar{AB} и \overbar{ АС}. $
6. Найти координаты середины отрезка АВ**.**
7. Если А, В, С, Д - координаты вершин параллелограмма, то найти координаты четвертой вершины Д**.**
8. Найти скалярное произведение векторов$\overbar{AB} и \overbar{ АС}$**.**