**Основы теории алгоритмов**

Теория алгоритмов **–** раздел математики, изучающий теоретические возможности эффективных процедур вычисления (алгоритмов) и их приложения. Теория алгоритмов является крупнейшим достижением науки XX века. Теория электронных вычислительных машин, теория и практика программирования не могут обойтись без нее. Теория алгоритмов считается одним из разделов математической логики. Но теория алгоритмов является и самостоятельной наукой, имеет собственный предмет исследования.

Содержательные явления, которые привели к образованию понятия «алгоритм», прослеживаются в математике в течение всего времени ее существования. Слово «алгоритм» происходит от algorithmi- латинской формы написания имени узбекского математика Хорезми (по арабски аль Хорезми), который сформулировал в IX веке правила четырех арифметических действий над числами в десятичной системе счисления. В Европе совокупность этих правил стали называть «алгоризм» или «алгорифм». Затем это слово переродилось в «алгоритм» и стало общим названием отдельных правил определенного вида (и не только правил арифметических действий). Длительное время этот термин употребляли только математики, обозначая им правила решения различных задач.

Развитие ЭВМ и методов программирования способствовало уяснению того факта, что разработка алгоритмов является необходимым этапом автоматизации.

Сейчас слово «алгоритм» вышло за пределы математики. Его применяют в самых различных областях. Под ним понимают точно сформулированное правило, назначение которого – быть руководством для достижения необходимого результата. То есть алгоритм – точно определенное правило действий (предписание, программа), для которого задано указание, как и в какой последовательности необходимо применять это правило к исходным данным задачи, чтобы получить ее решение.

Характерные свойства алгоритма:

1. Дискретность. Алгоритм описывает процесс последовательного построения величин, идущий в дискретном времени. Необходимый для вычисления интервал времени разбит на малые отрезки – такты. Система величин в конце каждого такта получается в результате осуществления элементарного шага алгоритма из систем величин, имеющейся к началу такта.
2. Определенность (детерминированность). Программа преобразований в каждом такте однозначно определена.
3. Результативность (направленность). Алгоритм направлен на получение определенного результата. В частности, если вычисляемая функция в данном такте не определена, совокупность правил определяет, что нужно считать результатом применения алгоритма.
4. Массовость. Исходные величины могут варьироваться в известных пределах. Алгоритм служит для решения не одной конкретной задачи, а целого класса задач (вспомните, например, способ решения квадратного уравнения).

Эти свойства алгоритмов являются эмпирическими, подмеченными для всех известных алгоритмов. Это понятие алгоритма не является математически строгим. Его называют непосредственным или интуитивным понятием алгоритма, оно объясняет смысл слова «алгоритм», но не определяет, что следует понимать под «правилом действия».

Из интуитивного понятия алгоритма следует, что вычисления в соответствии с некоторым алгоритмом выполняется механически и их можно поручить машине. Процесс, происходящий в такой машине, должен обладать всеми свойствами алгоритмического процесса: дискретностью, результативностью, детерминированностью. Английский математик А. Тьюринг (1912 -1954гг) в 1936 г. выполнил, а в 1937г. опубликовал работу, в которой уточнил понятие алгоритма, прибегая к воображаемой вычислительной машине, известной теперь под названием **машины Тьюринга**. Аналогичную концепцию машины позднее и независимо от Тьюринга ввел американский математик Э. Пост (1897 – 1954), поэтому машину иногда называют машиной Тьюринга – Поста. Идея Тьюринга возникла еще до появления ЭВМ и поэтому, не зависит от них. Итак, машина Тьюринга – это математическое понятие, введенное как формальное уточнение интуитивного понятия алгоритма.

Машина Тьюринга (МТ) – абстрактный исполнитель (абстрактная вычислительная машина). Была предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году для формализации понятия алгоритма.

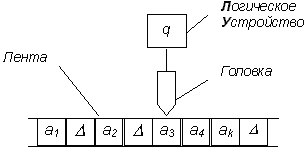
Машина Тьюринга состоит из бесконечной в обе стороны ленты (возможны машины Тьюринга, в которых имеется несколько бесконечных лент), разделённой на ячейки, и управляющего устройства, способного находиться в одном из множества состояний. Число возможных состояний управляющего устройства конечно и заранее точно определено.

Управляющее устройство может перемещаться влево и вправо по ленте, читать и записывать в ячейки ленты символы некоторого конечного алфавита. Выделяется особый пустой символ, заполняющий все клетки ленты, кроме тех из них (конечного числа), на которых записаны входные данные.

Управляющее устройство работает согласно правилам перехода, которые представляют алгоритм, реализуемый данной машиной Тьюринга. Каждое правило перехода предписывает машине, в зависимости от текущего состояния и наблюдаемого в текущей клетке символа, записать в эту клетку новый символ, перейти в новое состояние и переместиться на одну клетку влево или вправо. Некоторые состояния машины Тьюринга могут быть помечены как терминальные, и переход в любое из них означает конец работы, остановку алгоритма.

Машина Тьюринга называется **детерминированной**, если каждой комбинации состояния и ленточного символа в таблице соответствует не более одного правила. Если существует пара (ленточный символ – состояние), для которой существует 2 и более команд, такая машина Тьюринга называется **недетерминированной**.

Лента выступает в качестве внешней памяти; она считается неограниченной (бесконечной) – уже это свидетельствует о том, что машина Тьюринга является модельным устройством, поскольку ни одно реальное устройство не может обладать памятью бесконечного размера.



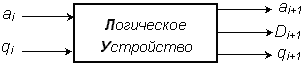
Лента разбита на отдельные ячейки, и передвигается относительно неподвижной головки вправо или влево. В каждую ячейку ленты может быть записан лишь один символ из произвольного конечного алфавита https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-k0doix.png, называемого **внешним**. В нём выделяется специальный символ –https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-EzmiBH.png, называемый пустым знаком – его посылка в какую-либо ячейку стирает тот знак, который до этого там находился, и оставляет ячейку пустой. Информация, хранящаяся на ленте, изображается конечной последовательностью знаков внешнего алфавита, отличных от пустого знака.

Головка всегда расположена над одной из ячеек ленты. Работа происходит тактами (шагами). Система исполняемых головкой команд предельно проста: на каждом такте она производит замену знака в обозреваемой ячейке https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-x9IMwh.pngзнакомhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-MXtPKK.png. При этом возможны сочетания:

* https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-53chwL.png– это означает, что в обозреваемой ячейке знак не изменился;
* https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-Qofw4N.png**,**https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-QDdXlo.pngозначает, что хранившийся в ячейке знак заменяется пустым, т.е. стирается;
* https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-XOq6s5.png,https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-kcW8rq.pngозначает, что пустой знак заменяется непустым (с номеромhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-wFBmC6.pngв алфавите), т.е. производится вставка знака;
* https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-kkRP3r.pngсоответствует замене одного знака другим.

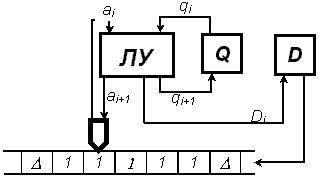
Таким образом, в машине Тьюринга реализуется система предельно простых команд обработки информации. Эта система команд обработки дополняется также предельно простой системой команд перемещений ленты: на ячейку влево, на ячейку вправо и остаться на месте, т.е. адрес обозреваемой ячейки в результате выполнения команды может либо измениться на 1, либо остаться неизменным. Однако, хотя фактически происходит перемещение ленты, обычно рассматривается сдвиг головки относительно обозреваемой секции – по этой причине команда сдвига ленты влево обозначается R («Right»), сдвига вправо – L («Left»), отсутствие сдвига – S («Stop»). В дальнейшем мы будем говорить именно о сдвиге головки и считать R, L и S командами её движения. Элементарность этих команд означает, что при необходимости обращения к содержимому некоторой ячейки, она отыскивается только посредством цепочки отдельных сдвигов на одну ячейку. Разумеется, это значительно удлиняет процесс обработки, зато позволяет обойтись без нумерации ячеек и использования команд перехода по адресу, т.е. сокращает количество истинно элементарных шагов, что важно в теоретическом отношении.

Обработка информации и выдача команд на запись знака, а также сдвига ленты в машине Тьюринга производится логическим устройством (ЛУ). ЛУ может находиться в одном из состояний, которые образуют конечное множество и обозначаются https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-9cQacT.png, причём, состояниеhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-gwuHB_.pngсоответствует завершению работы, аhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-elE5qF.pngявляется начальным (исходным). Алфавитhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-UIVuD9.pngсовместно со знаками R, L, S образуют **внутренний** алфавит машины. ЛУ имеет два входных каналаhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-8Zf3ov.pngи три выходныхhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-cuWxX2.png:



Понимать схему необходимо следующим образом: на такте https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-xf2scZ.pngна один вход ЛУ подаётся знак из обозреваемой в данный момент ячейки (https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-0kWqJT.png), а на другой вход – знак, обозначающий состояние ЛУ в данный момент (https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-U2lNW1.png). В зависимости от полученного сочетания знаков https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-QKWwxL.png и имеющихся правил обработки, ЛУ вырабатывает и по первому выходному каналу направляет в обозреваемую ячейку новый знак (https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-UkVAE5.png), подаёт команду перемещения головки (https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-E3Xru5.pngиз R, L и S), а также даёт команду на вызов следующего управляющего знака (https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-OlEba4.png).

Таким образом, элементарный шаг (такт) работы машины Тьюринга заключается в следующем: головка считывает символ из обозреваемой ячейки и, в зависимости от своего состояния и прочитанного символа, выполняет команду, в которой указано, какой символ записать (или стереть) и какое движение совершить. При этом головка переходит в новое состояние. Схема функционирования такой машины представлена:



В данной схеме отражено разделение памяти на внешнюю и внутреннюю. Внешняя представлена, как указывалось, в виде бесконечной ленты – она предназначена для хранения информации, закодированной в символах внешнего алфавита. Внутренняя память представлена двумя ячейками для хранения следующей команды в течение текущего такта: вhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-O_BfpL.pngпередаётся из ЛУ и сохраняется следующее состояние (https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-yfFbU8.png), а вhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-GBoRpE.png– команда сдвига (https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-2MlCUb.png). Из https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-HdxeLV.png по линии обратной связи https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-drikP4.png поступает в ЛУ, а изhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-MMyeip.pngкоманда поступает на исполнительный механизм, осуществляющий при необходимости перемещение ленты на одну позицию вправо или влево.

Общее правило, по которому работает машина Тьюринга, можно представить следующей записью: https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-fyVSag.png, т.е. после обзора символаhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-yXvW1P.pngголовкой в состоянииhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-F60WCT.png, в ячейку записывается символhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-P6B2LW.png, головка переходит в состояниеhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-5zOXH5.png, а лента совершает движениеhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-PuCS54.png. Для каждой комбинацииhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-NblFIq.pngимеется **ровно одно** правило преобразования (правил нет только дляhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-epBDHA.png, поскольку, попав в это состояние, машина останавливается). Это означает, что логический блок реализует функцию, сопоставляющую каждой паре входных сигналовhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-uzrABH.pngодну и только одну тройку выходныхhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-HZQFlc.png– она называется **логической функцией машины** и обычно представляется в виде таблицы (функциональной схемой машины), столбцы которой обозначаются символами состояний, а строки – знаками внешнего алфавита. Если знаков внешнего алфавитаhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-LNr7oi.png, а число состояний ЛУhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-99uItn.png, то, очевидно, общее число правил преобразования составитhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-4lvyxD.png.

Конкретная машина Тьюринга задаётся перечислением элементов множеств https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-_lbzjn.pngиhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-ocTps3.png, а также, логической функцией, которую реализует ЛУ, т.е. набором правил преобразования. Ясно, что различных множествhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-jaEm4f.png,https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-qT2pVp.pngи логических функций может быть бесконечно много, т.е. и машин Тьюринга также бесконечно много.

Совокупность состояний всех ячеек ленты, состояния ЛУ и положение головки называется **конфигурацией** машины.

Записать конфигурацию можно следующим образом: https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-KJCsBR.png, которая означает, что в слове изhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-rx4ls3.pngсимволов обозревается секция номерhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-Vg3JEn.pngи при этом управляющее устройство находится в состоянииhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-4RGWW0.png. Конфигурация машины может содержать любое количество символов внешнего алфавита и лишь один символ внутреннего. Часто конфигурацию записывают в видеhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-KJIetl.png, гдеhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-YTWUi1.png– слово на ленте слева от головки,https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-SRAA0b.png– слово на ленте справа от головки, включая обозреваемый знак. Слева от https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-KLYlbH.png и справа от https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-79SHWA.png лента пуста.

Перед началом работы на пустую ленту записывается исходное слово конечной длины в алфавитеhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-uyowdL.png; головка устанавливается над первым символом словаhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-nuMC8N.png, ЛУ переводится в состояниеhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-Xb1Rp9.png(т.е. начальная конфигурация имеет видhttps://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-fh3L5P.png). Поскольку в каждой конфигурации реализуется только одно правило преобразования, начальная конфигурация однозначно определяет всю последующую работу машины, т.е. всю последовательность конфигураций вплоть до прекращения работы.

В зависимости от начальной конфигурации возможны два варианта развития событий:

* после конечного числа тактов машина останавливается по команде остановки; при этом на ленте оказывается конечная конфигурация, соответствующая выходной информации;
* остановки не происходит.
* В первом случае говорят, что данная машина применима к начальной информации, во втором – нет. Вся совокупность входных конфигураций, при которых машина обеспечивает получение результата, образуют класс **решаемых задач**. Очевидно, применять машину Тьюринга для задачи, не входящей в класс решаемых, бессмысленно. С другой стороны, во многих случаях возможно расширение класса решаемых задач за счёт создания другой машины Тьюринга. Возникает вопрос: можно ли построить такую универсальную машину (хотя бы на теоретическом уровне), которая решала бы любую задачу? Здесь мы подошли к вопросу об алгоритмической разрешимости.

По своему устройству машина Тьюринга крайне примитивна. Она намного проще самых первых компьютеров. Примитивизм состоит в том, что у неё предельно прост набор элементарных операций, производимых головкой – считывание и запись, а также в том, что доступ к ячейкам памяти (секциям ленты) в ней происходит не по адресу, как в компьютерах, а путём последовательного перемещения вдоль ленты. По этой причине даже такие простые действия как сложение или сравнение двух символов машина Тьюринга производит за несколько шагов, а обычные операции сложения и умножения требуют весьма большого числа элементарных действий. Однако машина Тьюринга была придумана не как модель (прототип) реальных вычислительных машин, а для того, чтобы показать принципиальную (теоретическую) возможность построения сколь угодно сложного алгоритма из предельно простых операций, причём сами операции и переход от одной к последующей машина выполняет автоматически.