**Комбинаторика**

 В узком смысле комбинаторика – это подсчёт различных комбинаций, которые можно составить из некоторого множества дискретных объектов. Под объектами понимаются какие-либо обособленные предметы или живые существа – люди, звери, грибы, растения, насекомые и т.д. При этом комбинаторику совершенно не волнует, что множество состоит из тарелки манной каши, паяльника и болотной лягушки. Принципиально важно, что эти объекты поддаются перечислению – их три (дискретность) и существенно то, что среди них нет одинаковых.

 Представителям почти всех профессий приходится решать задачи на составление различных комбинаций. Начальник цеха – виды работ между станками, агроном – размещение посевов на нескольких полях, завуч – составление расписания уроков, химик – связи между атомами, лингвист – различные варианты значений букв незнакомого языка.

 Всем этим и занимается комбинаторика. Возникла в XVI веке. В обществе большое место уделялось азартным играм (карты, лотереи, кости).

Одним из первых был итальянский математик Тарталья (игра в кости). Он составил таблицу, показывающую, сколькими способами могут выпасть r костей без учета того, что одна и та же сумма очков может быть получена разными способами (1 + 3 +4; 4 + 2 + 2).

Комбинаторика используется при решении транспортных задач, планов реализации продукции, в статистике.

***Кости****— одна из древнейших игр. Инструментом для игры являются*[*кубики*](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1%D0%B8%D0%BA%D0%B8)*(кости) в количестве от одного до шести в зависимости от вида игры. При правильной разметке противоположные грани костей должны в сумме составлять 7 (6 против 1, 5 против 2, 4 против 3). Суть игры состоит в выбрасывании кубиков и дальнейшем подсчёте очков, количество которых и определяет победителя. Разновидности игры предполагают разный подсчёт очков.*

 *Первые прообразы игральных костей найдены в*[*Египте*](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%95%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%82)*, и датируются они*[*XX веком до н. э.*](https://ru.wikipedia.org/wiki/XX_%D0%B2%D0%B5%D0%BA_%D0%B4%D0%BE_%D0%BD._%D1%8D.)*Широко распространилась в*[*Древнем Риме*](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%A0%D0%B8%D0%BC)*.*



*Название «кости» происходит из материала, из которого они выполнялись. Обычно их вырезали из суставов копытных животных. Бедные слои населения редко могли позволить подобную роскошь, поэтому делали их из дерева. Более состоятельные слои населения (в разные эпохи) пользовались костями из драгоценных и полудрагоценных материалов: слоновой кости, агата, янтаря, оникса, серебра, а так же золота.*

 **Основные понятия**

**Перестановки** – множества, состоящие из **n** элементов, отличающиеся только порядком расположения элементов.

$n!=1∙2∙3∙4∙…∙n, $- читается эн факториал.

** , где n! = 1\*2\*3\*…\*n ( 1!= 1, 0!= 1) (1.1)

Пример: a, b, c (a, b, c) (b, a, c) (c, a, b)

 (a, c, b) (b, c, a) (c, b, a)

Pn = 3! = 1\*2\*3 = 6

**Сочетания** – множества, состоящие из **m** элементов множества **n**, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

 (читается це из эн по эм) (1.2)

Пример: a, b, c (a, b) (a, c) (b, c)

.

**Размещения** – множества из **m** элементов множества **n**, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или порядком.

 (1.3) 

Пример: a, b, c (a, b) (a, c) (b, c)

 (b, a) (c, a) (c, b)



*Пример 1.* 15 учеников обменялись рукопожатиями. Сколько произведено рукопожатий?

Решение: по формуле (1.2)

$С\_{15}^{2}=\frac{15!}{\left(15-2\right)!∙2!}=$ $\frac{15!}{13!∙2!}=\frac{13!∙14∙15}{13!∙1∙2}$ =105

*Пример 2.* Сколько трехзначных чисел можно составить из нечётных цифр, если каждую цифру можно использовать только один раз?

Решение: Нечётные цифры: 1, 3, 5, 7, 9. По формуле (1.3)

. $\frac{5!}{2!}=\frac{2!∙3∙4∙5}{2!}$

*Пример 3.* Сколькими способами из колоды в 52 карты можно вынуть 10 карт, чтобы среди них был хоть один туз?

Решение:

 столько способов выбора 10 карт

столько способов выбрать 10 карт без туза

 - столько способов выбрать 10 карт, среди которых есть хотя бы один туз.

 *Пример 4.* Сколько существует пятизначных чисел с разными цифрами, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, из которых три первые цифры чётные, а остальные нечётные?

Решение:

Чётные цифры: 2, 4, 6, 8 (4 шт.)

Нечётные цифры: 1, 3. 5, 7, 9 (5 шт.)

.

 Пример 5. Сколько существует перестановок семи учеников, при которых три определенных ученика находятся рядом друг с другом?

 Решение:

Три ученика рядом: P3 = 3! = 1\*2\*3 = 6,

Считая трех человек за одного, получим: Р5 = 5! =1\*2\*3\*4\*5 = 120

Пример 6. Сколько **различных** семибуквенных слов можно составить из букв слова КОЛОБОК? (коболок, оккобол, болокко, …)

 **Перестановки с заданным числом повторений**

Количество перестановок с заданным числом повторений, входящих в него элементов (**а** повторяется n1 , **b** повторяется n2,…, **c** повторяется nk, n1 + n2 + … + nk = n):

 $P\_{n}\left(n\_{1},n\_{2},…,n\_{k}\right)=\frac{n!}{n\_{1}!∙n\_{2}!∙…∙n\_{k}!}$

КОЛОБОК. Повторяются буквы; К- 2 раза =$n\_{1}$; О – 3 раза = $n\_{2}$. Л и Б по одному разу - можно не учитывать.

Р7(2, 3)=$\frac{7!}{2!∙3!}=\frac{4∙5∙6∙7}{1∙2}=420$

 **Перестановки с неограниченным числом повторений**

Если выбор элементов из данного множества производится с возвращением, то есть выбранный элемент каждый раз возвращается назад или заменяется аналогичным:

 $\tilde{P\_{n}}\left(r\right)=n^{r}$

Пример: сколько различных трехзначных чисел можно составить из четных цифр. (2, 4, 6, 8)

Решение: $\tilde{P\_{4}}\left(3\right)=4^{3}=64$, то есть на первое место можно поставить любую из четырех цифр (их 4). Так как цифры могут повторяться, то на второе место снова можно поставить любую из четырех цифр, а также и на третье место.

22 24 26 28 222, 224, 226, 228

42 44 46 48

62 64 66 68

82 84 86 88 и так далее.

Задачи.

1. Сколько не более чем трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числах не повторялись?
2. Сколько различных полных обедов можно составить из трех первых блюд, четырех вторых и двух третьих?
3. В магазине имеется 3 вида ручек и 5 видов карандашей. Сколько различных комплектов, содержащих ручку и карандаш можно приобрести в этом магазине?
4. 11 человек обменялись рукопожатием. Сколько произведено рукопожатий?
5. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число, $1\*\*7?$ ( а) цифры не повторяются; б) цифры могут повторяться)?
6. Сколькими способами можно рассадить четырех человек в четырехместном купе?
7. Сколько различных слов из трех букв можно составить из букв слова а) куб; б) ромб; в) пенал?
8. Сколько можно составить трехзначных чисел из нечетных цифр, если каждую использовать только раз?
9. Сколько четырехзначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, …, 9, если каждая цифра может повторяться?
10. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров ( с повторением цифр и без повторения)?
11. Из 10 роз и 8 георгинов составляют букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько вариантов букетов можно составить?
12. Сколько окружностей можно провести через 10 точек, из которых никакие 4 не лежат на одной окружности и никакие 3 не лежат на одной прямой?
13. Сколькими способами из колоды в 52 карты можно выбрать 6 карт, чтобы попались король и туз одной масти?
14. Сколько букв алфавита можно составить комбинациями из 5 сигналов, из которых 3 импульсы тока, 2 – паузы?
15. Сколько различных слов можно составить из букв слова МИССИСИПИ?
16. Сколько различных слов можно составить из букв слова СТАТИСТИКА?
17. Сколькими способами можно расставить на полке 4 книги по теории игр, 3 книги по логике и 2 книги по физике, если книги по одному предмету одинаковы?
18. Решить уравнение: $\frac{А\_{х}^{4}∙Р\_{х-4}}{Р\_{х-2}}=42$

Решения:

1. N= N1 + N2 + N3 = $A\_{5}^{1}+A\_{5}^{2}+A\_{5}^{3}=$5 + 20 + 60 =85.
2. N = 4\*3\*2 =24 (К каждому из четырех первых блюд можно добавить любое из трех вторых 4\*3=12, к каждому из 12 наборов 1+2 блюд можно добавить любое третье).
3. N= 3\*5 = 15.
4. $C\_{11}^{2}=\frac{11!}{2!∙\left(11-2\right)!}=\frac{11!}{1∙2∙9!}=\frac{9!∙10∙11}{2∙9!}=\frac{10∙11}{2}=55$
5. Если цифры не повторяются, то можно рассматривать размещения из восьми оставшихся цифр $А\_{8}^{2}=\frac{8!}{6!}=\frac{6!∙7∙8}{6!}=7∙8=56$; если цифры могут повторяться, то на второе место и на третье можно поставить любую из 10 цифр $N=10^{2}=100$
6. $Р\_{4}=4!=24$
7. а) $Р\_{3}=3!=1\*2\*3=6$; б) $А\_{4}^{3}=\frac{4!}{1!}$ = 24; в) $А\_{5}^{3}=\frac{5!}{2!}=3\*4\*5=60$
8. $А\_{5}^{3}=60$
9. На первое место нельзя ставить 0, на последнее место можно поставить только 0 или 5, значит $N=9∙10^{2}∙2=1800$
10. $N= 10^{7}; A\_{10}^{7}=\frac{10!}{3!}$ =4\*5\*6\*7\*8\*9\*10 = 604800
11. $N= C\_{10}^{2}∙C\_{8}^{3}=\frac{10!}{2!∙8!}∙\frac{8!}{3!∙5!}=\frac{9∙10∙6∙7∙8}{2∙6}=9∙10∙7∙4=2520$
12. $N= C\_{10}^{3}=\frac{10!}{3!∙7!}=\frac{8∙9∙10}{1∙2∙3}=4∙3∙10=120$
13. $N=4∙C\_{44}^{4}=4∙\frac{44!}{4!∙40!}=\frac{4∙41∙42∙43∙44}{1∙2∙3∙4}=41∙7∙43∙44=543004$
14. $Р\_{5}\left(2, 3\right)=\frac{5!}{2!∙3!}=10$
15. $Р\_{9}\left(4,3\right)=\frac{9!}{4!∙3!}=\frac{5∙6∙7∙8∙9}{1∙2∙3}=5∙7∙8∙9=2520$
16. $ Р\_{10}\left(2,3,2,2\right)=\frac{10!}{2!∙3!2!∙2!}=75600 $
17. $ Р\_{9}\left(2,3,4\right)=\frac{9!}{2!∙3!∙4!}=1260$
18. $\frac{А\_{х}^{4}∙Р\_{х-4}}{Р\_{х-2}}=42$

$\frac{\frac{х!}{\left(х-4\right)!}∙\left(х-4\right)!}{\left(х-2\right)!}=42$ $\frac{х∙\left(х-1\right)∙\left(х-2\right)!}{\left(х-2\right)!}=42$

$х^{2}-х-42=0$ х1= - 6 < 0 – не удовлетворяет условию $x\in N$?

 X2 = 7 Ответ: х = 7