Проверка статистических гипотез

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Во многих случаях **результаты наблюдений используются для проверки предположений** **(гипотез**) относительно либо самого вида распределения генеральной совокупности, либо значения параметров уже известного распределения – статистических гипотез. Пусть известно распределение СВХ (например, это нормальный закон), и по выборке необходимо проверить гипотезу о значении некоторого параметра этого распределения.

Проверяемую гипотезу называют основной или нулевой гипотезой и обозначают Н0. Вместе с Н0 рассматривают и одну из альтернативных (конкурирующих) гипотез Н1. Например, если проверяется основная гипотеза о равенстве математического ожидания числу 6, т.е. Н0: *а*=6, то в качестве конкурирующей гипотезы можно рассмотреть одну из следующих: а) Н1: *а≠*6; б) Н1: *а>*6; Н1: *а<*6.

Выдвинутая гипотеза Н0 может соответствовать истине или нет. При проверке гипотезы Н0 по результатам выборки могут быть допущены ошибки двух родов:

1. **Ошибка первого рода – отвергнута правильная гипотеза;**
2. **Ошибка второго рода – принята неправильная гипотеза.**

Последствия этих ошибок неравнозначны. Например, если при проверке качества партии деталей по выборке из неё в качестве Н0 принята гипотеза, что доля брака не более 0,1 %, то при допущении ошибки I рода будет забракована годная продукция (риск производителя), а при ошибке II рода к потребителю попадает партия деталей с долей брака больше допустимого.

Если отвергнуто правильное решение «продолжать строительство жилого дома», то эта ошибка I рода повлечёт материальный ущерб; если же принято неправильное решение «продолжать строительство», несмотря на опасность обвала стройки, то это ошибка II рода может повлечь гибель людей.

*Вероятность совершить ошибку I рода называют уровнем значимости α. Обычно берут α = 0,05; 0,01; 0,005. Уровень значимости α = 0,05 означает, что в 5 случаях из 100 имеется риск допустить ошибку I рода (отвергнуть правильную гипотезу).*

Правило по которому принимается решение принять или отвергнуть Н0, называется *статистическим критерием К*. Выбор К зависит от конкретной задачи.

Для проверки Н0 используют специально подобранную случайную величину, точное или приближённое значение которой известно. Эту величину обозначают через V или Z, если она распределена нормально, F или v2 по закону Фишера-Снедекора, Т – по закону Стьюдента, χ2 - по закону «хи квадрат». Значение критерия (критической точки) можно найти в специальных таблицах.

*Наблюдаемым (эмпирическим) значением Кнабл. Называют значение критерия, которое вычислено по данным выборки.*

*Критической областью называют совокупность значений критерия при которых Н0 отвергают.*

*Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых Н0 принимают*.

*Основной принцип проверки статистических гипотез: если Кнабл принадлежит область принятия гипотезы, то гипотезу принимают. Так как при принятии Н0 возможны ошибки I рода, то правильнее говорить «данные наблюдений согласуются с Н0 и, следовательно, нет оснований её отвергнуть».*

Критическими точками Ккр. называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством К > Ккр., где Ккр. > 0.

Левосторонней называют критическую область, для которой К < Ккр., где Ккр. < 0.

Двусторонней называют критическую область, для которой К < к1, К > к2, где к2 > к1.

При отыскании критической области задают уровень значимости α и ищут критические точки:

а) для правосторонней критической области P (K > ккр)= α;

б) для двусторонней симметричной области

P (K > ккр)= α/2.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза Н1.

1. СРАВНЕНИЕ ДВУХ ДИСПЕРСИЙ НОРМАЛЬНЫХ ГЕНРАЛЬНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ.

Гипотезы о дисперсии имеют в технике очень большое значение, так как 2 – мера таких числовых характеристик, как точность машин, погрешности измерительных приборов, точность технологических процессов и т.п.

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально. По независимым выборкам объёмов n1 и n2 найдены исправленные выборочные дисперсии . По исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить Н0: D(х) = D(у).

Если Н0 справедлива, то различие не значимо (приборы имеют одинаковую точность).

В качестве критерия принимается отношение большей исправленной дисперсии к меньшей

Величина F при условии справедливости Н0 имеет распределение Фишера-Снедекора со степенями свободы *к1 = n1 –* 1и *к2 = n2 –* 1 (*n1* – объём выборки с большей исправленной дисперсией).

*Правило 1.* Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить Н0: D(х) = D(у) при конкурирующей гипотезе Н1: D(х) > D(у), надо вычислить наблюдаемое значение критерия

и по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора по заданному α и числам степеней свободы *к1* и *к2* найти критическую точку Fкр.(α, *к1, к2*). Если Fнабл.< Fкр – нет оснований отвергнуть Н0. Если Fнабл.> Fкр – нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. По двум независимым выборкам объёмов *n1* = 12 и *n2* = 15 извлечённым из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены . При α = 0,05 проверить Н0: D(х) = D(у) при Н1: D(х) > D(у).

Решение:

Так как Н1: D(х) > D(у), то критическая область правосторонняя Fкр (0,05; 11; 14) = 2,56.

Так как < Fкр., нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Пример 2. Двумя измерительными приборами X и Y произведено соответственно *n1* = 10 и *n2* = 18 измерений. Получены исправленные дисперсии .

При уровне значимости α = 0,1 проверить Н0: D(х) = D(у) при

Н1: D(х) ≠ D(у).

Решение:

Так как Н1: D(х) ≠ D(у), то критическая область двусторонняя.

По таблице ([3] приложение 7)

находим Fкр (0,05; 9; 17) = 2,50

Fнабл.> Fкр → нулевую гипотезу о равенстве дисперсий отвергаем. Выборочные дисперсии различаются значимо, значит точность приборов неодинакова; следует предпочесть прибор с меньшей дисперсией.

1. СРАВНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ДИСПЕРСИЙ НОРМАЛЬНЫХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ ПО ВЫБОРКАМ ОДИНАКОВОГО ОБЪЁМА. КРИТЕРИЙ КОЧРЕНА

Пусть генеральные совокупности х1, х2, …, хL распределены нормально. Из этих совокупностей извлечено *L* независимых выборок одинакового объёма и по ним найдены исправленные выборочные дисперсии все с одинаковым числом степеней свободы *к = n –* 1. Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить

Н0: D(Х1) = D(Х2) = … = D(ХL).

Можно использовать критерий Фишера-Снедекора и сравнить наименьшую и наибольшую дисперсии, но в этом случае не учитывается информация, которую содержат остальные дисперсии.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимается критерий Кочрена – отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий:

Критическую точку Gкр.(α, *к, l*) находят по специальным таблицам [3; приложение 8].

*Правило2*. Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу об однородности дисперсии нормально распределённых совокупностей, надо вычислить наблюдаемое значение критерия (Gнабл) и по таблице критических точек найти Gкр.. Если Gнабл > Gкр отвергаем Н0.

Пример 3. По четырём независимым выборкам одинакового объёма n=17, извлечённым из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные дисперсии: 0,21; 0,25; 0,34; 0,40. Требуется: а) при уровне значимости α = 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности генеральных дисперсий (критическая область - правосторонняя); б) оценить генеральную дисперсию.

Решение:

.

По таблице [приложение 8] при α = 0,05, числу степеней свободы k = 17-1 = 16 и числу выборок *L* = 4 найдём Gкр(0,05; 16; 4) = 0,4366.

а) Так как Gнабл < Gкр, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, то есть исправленные дисперсии отличаются незначимо.

б) Так как Н0 справедлива, то в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднее арифметическое исправленных дисперсий

.

1. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ЗНАЧИМОСТИ ВЫБОРОЧНОГО КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

*Правило3.* Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при Н1: rг≠0, надо вычислить наблюдаемое значение критерия

По таблице критических точек распределения Стьюдента [приложение 6] при заданном уровне значимости и числу степеней свободы k = n – 2, найти критическую точку tкр (α, k) для двусторонней области. Если |Тнабл| < tкр – нет оснований отвергнуть Н0. Если |Тнабл| > tкр – отвергаем Н0.

Пример 4. По выборке объёма n = 50, извлечённой из нормальной двумерной совокупности, найден выборочный коэффициент корреляции rв = -0,58. При уровне значимости α = 0,05 проверить Н0: rг=0 при Н1: rг≠0.

Решение:

Найдём

Так как по условию Н1: rг≠0, то критическая область двусторонняя.

Найдём tкр(0,05; 48) = 2,01.

Так как |Тнабл| > tкр – нулевую гипотезу отвергаем, выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, т.е. X и Y связаны линейной зависимостью.



1. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

Не всегда есть основания формулировать конкурирующую гипотезу явно. Часто нужно узнать, не противоречат ли результаты пробного эксперимента основной гипотезе. Так как конкурирующую гипотезу явно не высказывают, то основную гипотезу называют просто гипотезой и ведут речь о том, согласуется ли эксперимент с высказанным предположением или противоречит ему.

По данным наблюдений выдвигают гипотезу о законе распределения генеральной совокупности, например, предполагают, что генеральная совокупность распределена равномерно или нормально. Затем для тех же объектов, которые попали в выборку, вычисляют частоты, исходя из теоретической гипотезы. В результате получают выравнивающие частоты, которые отличаются от наблюдавшихся. Для проверки правильности выдвинутой гипотезы используют критерии согласия эмпирических наблюдений выдвинутой гипотезе. Есть несколько критериев согласия: χ2 («хи квадрат»), К. Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

*Правило 4.* Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу Н0: генеральная совокупность распределена нормально, надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:

и по таблице критических точек распределения χ2 (Приложение 5), по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы *k = S-3* найти критическую точку χкр2 (α, k). Если χнабл2 < χкр2 – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если χнабл2 > χкр2 – нулевую гипотезу отвергают.

Число степеней свободы находят по формуле *k = S-1-r,* где *S –* число групп (частичных интервалов) выборки, r – число параметров предполагаемого распределения. Для нормального распределения оцениваются 2 параметра (математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение).

Пример 5. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности χ с эмпирическим распределением выборки объёма n = 200

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 |
| ni | 6 | 9 | 26 | 25 | 30 | 26 | 21 | 24 | 20 | 8 | 5 |

Решение:

1. Найдём методом произведений выборочные характеристики распределения, для чего составляем таблицу 1.

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | ni | ui | ni ui | ni ui2 | ni (ui+1)2 |
| 0,3 | 6 | -5 | -30 | 150 | 96 |
| 0,5 | 9 | -4 | -36 | 144 | 81 |
| 0,7 | 26 | -3 | -78 | 234 | 104 |
| 0,9 | 25 | -2 | -50 | 100 | 25 |
| 1,1 | 30 | -1 | -30 | 30 | 0 |
| 1,3 | 26 | 0 | 0 | 0 | 26 |
| 1,5 | 21 | 1 | 21 | 21 | 84 |
| 1,7 | 24 | 2 | 48 | 96 | 216 |
| 1,9 | 20 | 3 | 60 | 180 | 320 |
| 2,1 | 8 | 4 | 32 | 128 | 200 |
| 2,3 | 5 | 5 | 25 | 125 | 180 |
|  | n=200 |  |  |  |  |

Ложный нуль с = 1,3 – варианта, расположенная в середине ряда. Шаг выборки *h* = x2-x1 = 0,5-0,3=0,2. Условные варианты вычислены по формуле:

.

Для контроля используем формулу:

1332=1208+2(-38)+200 – верно.

Найдём условные моменты:

;

Вычисляем выборочную среднюю:

Находим выборочную дисперсию:

Выборочное среднеквадратическое отклонение:

1. Для нахождения теоретических частот составим Табл.2

Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | ni |  |  | (ui) | ni1=81,63(ui) |
| 0,3 | 6 | -0,962 | -1,96 | 0,0584 | 5 |
| 0,5 | 9 | -0,762 | -1,56 | 0,1182 | 10 |
| 0,7 | 26 | -0,562 | -1,15 | 0,2059 | 17 |
| 0,9 | 25 | -0,362 | -0,74 | 0,3034 | 25 |
| 1,1 | 30 | -0,162 | -0,33 | 0,3778 | 31 |
| 1,3 | 26 | 0,038 | 0,08 | 0,3977 | 32 |
| 1,5 | 21 | 0,238 | 0,49 | 0,3538 | 29 |
| 1,7 | 24 | 0,438 | 0,89 | 0,2685 | 22 |
| 1,9 | 20 | 0,638 | 1,30 | 0,1714 | 14 |
| 2,1 | 8 | 0,838 | 1,71 | 0,0925 | 8 |
| 2,3 | 5 | 1,038 | 2,12 | 0,0422 | 3 |
|  | 200 |  |  |  | 196 |

Теоретические частоты находим по формуле:

Функция (ui) чётная, т.е. (ui)= (-ui).

1. Проверяем гипотезу о нормальном распределении совокупности при уровне значимости α=0,05. Вычислим χ2набл, для чего составим расчётную таблицу 3.

Таблица 3.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ni | ni1 | ni-ni1 | (ni-ni1)2 |  | ni2 |  |
| 6 | 5 | 1 | 1 | 0,2 | 36 | 7,2 |
| 9 | 10 | -1 | 1 | 0,1 | 81 | 8,1 |
| 26 | 17 | 9 | 81 | 4,76 | 676 | 39,76 |
| 25 | 25 | 0 | 0 | 0 | 625 | 25 |
| 30 | 31 | -1 | 1 | 0,03 | 900 | 29,03 |
| 26 | 32 | -6 | 36 | 1,13 | 676 | 21,13 |
| 21 | 29 | -8 | 64 | 2,21 | 441 | 15,21 |
| 24 | 22 | 2 | 4 | 0,18 | 576 | 26,18 |
| 20 | 14 | 6 | 36 | 2,57 | 400 | 28,57 |
| 8 | 8 | 0 | 0 | 0 | 64 | 8 |
| 5 | 3 | 2 | 4 | 1,33 | 25 | 8,33 |
| 200 | 196 |  |  |  |  | 216,51 |

Последнюю строку получаем, суммируя числа соответствующих столбцов.

Контроль:

Найдём число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки равно 11. *k*=11-3=8.

По таблице критических точек распределения χ2, по уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы *k=*8 находим   
.

Так как , то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, то есть расхождение эмпирических и теоретических частот незначимо. Значит, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

1. СРАВНЕНИЕ ДВУХ СРЕДНИХ НОРМАЛЬНЫХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ, ДИСПЕРСИИ КОТОРЫХ ИЗВЕСТНЫ

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально. По независимым выборкам объёмов n и m найдены выборочные средние .

*Правило 1.* Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу Н0: M(х) = M(у) о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе Н1: M(х) ≠ M(у), надо вычислить наблюдаемое значение критерия

И по таблице функции Лапласа найти критическую точку из равенства

Если |Zнабл| > zкр  - нулевую частоту отвергаем.

*Правило 2.* Д ля того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу Н0: M(х) = M(у) при конкурирующей гипотезе Н1: M(х) M(у), надо вычислить Zнабл и zкр из равенства

Если Zнабл < zкр – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если Zнабл > zкр  - нулевую гипотезу отвергают.

**Пример 6.1**. Пусть два предприятия производят провод. Пусть *x* – прочность на разрыв провода, изготовленного на предприятии А; *y* – прочность на разрыв провода, изготовленного на предприятии В; X и Y можно считать нормально распределёнными и независимыми. На основании многолетних наблюдений известны σx и σy. C каждого предприятия был взят и проверен провод из 50 катушек. При этом получились средние прочности на разрыв:

*.*

Следует проверить, можно ли считать это расхождение случайным или оно является значительным, если σx=8,0 кгс/мм2 и σy= 9,4 кгс/мм2. Пусть α=0,05.

Решение:

Мы выдвигаем гипотезу Н0: M(х) = M(у) при Н1: M(х) ≠ M(у).

При этой гипотезе величина

[приложение 2]. Так как |Zнабл| > zкр , значит нулевая гипотеза должна быть отвергнута, т.е. качественное различие между продукциями предприятий существенно и его нельзя объяснить случайностью выборки.

1. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ
2. Дать определение статистической гипотезы.
3. Понятие критической области и области принятия решения.
4. Нулевая и конкурирующая гипотеза.
5. Ошибки I и II рода.
6. Понятие статистического критерия и наблюдаемого значения критерия.
7. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.
8. Сравнение нескольких дисперсий.
9. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции.
10. Проверка гипотезы о нормальном распределении. Критерий согласия Пирсона.
11. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны.
12. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
13. По двум независимым выборкам объёмов n1 = 10 и n2 = 16, извлечённым из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии При уровне значимости α = 0,05 проверить Н0: D(х) = D(у) при Н1: D(х) > D(у).
14. По шести независимым выборкам одинакового объёма n=37, извлечённым из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 2,34; 2,66; 2,95; 3,65; 3,86; 4,54. Требуется проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий при уровне значимости α1=0,01 и α2=0,05.
15. По выборке объёма n = 62, извлечённой из нормальной двумерной генеральной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции rb = 0,03. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при Н1: rг≠0.
16. По выборке объёма n = 30 найден средний вес = 130 г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке объёма m = 40, найдём средний вес = 125 г изделий, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны: D(х)=60 г2 и D(у)=80 г2. Требуется, при α=0,05, проверить нулевую гипотезу Н0: М(х) = М(у) при Н1: М(х) ≠ М(у).
17. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α=0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами ni и теоретическими частотами ni1, которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности *x*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ni | 14 | 18 | 32 | 70 | 20 | 36 | 10 |
| ni2 | 10 | 24 | 34 | 80 | 18 | 22 | 12 |

1. В задаче на уравнение корреляции проверить гипотезу о равенстве 0 генерального коэффициента H0: rг = 0
2. В задаче на обработку статистических данных проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.