**№5 Уравнение плоскости в пространстве**

1. Уравнение поверхности.

Уравнение F(x, y, z)=0 определяет в пространстве некоторую поверхность – множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению. Часто поверхность задается не уравнением, а как множество всех точек, обладающих некоторым свойством. В этом случае находят уравнение поверхности, исходя из геометрических свойств.

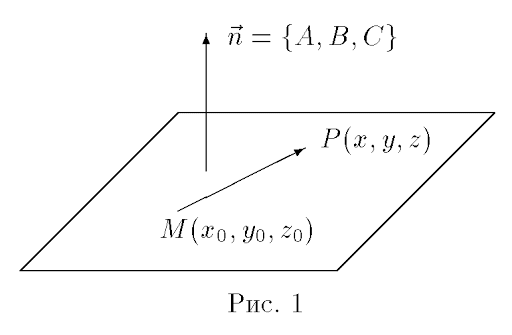
Пример 1: Найти уравнение шаровой поверхности радиуса R с центром в точке О0(х0, у0, z0).

Решение: Пусть М(х, у, z)- произвольная ( переменная) точка этой поверхности. Тогда по определению сферы │О0М│= R. Если центр сферы находится в начале координат, то x2+y2+z2= R2-уравнение сферы с центром в начале координат.

Для произвольной точки получим │О0М│= →

- уравнение сферы с центром в точке О0(х0, у0, z0) и радиусом R.

1. Рассмотрим в пространстве плоскость с нормальным вектором Нормальный вектор – это вектор перпендикулярный плоскости.



Так как вектор перпендикулярен плоскости, то он перпендикулярен любому вектору, лежащему в этой плоскости. Пусть М0(х0, у0, z0)-фиксированная точка плоскости, а точка Р(х, у, z)-переменная точка плоскости. Вектор Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0, т.е. А(х- х0) + В(у- у0)+С(z- z0) =0 **(1)**

Уравнение (1) – это уравнение плоскости в пространстве, перпендикулярной заданному вектору и проходящей через заданную точку, это любое уравнение линейное, относительно координат. Координаты любой точки, лежащей в плоскости, удовлетворяют этому уравнению.

Пример 2: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М(1, -2, 3) и перпендикулярно вектору .

Составляем уравнение плоскости, подставляя заданные числа в уравнение (1): 2(х – 1) + 0(у +2)+ 4(z-3)=0, раскрывая скобки, получим

2х + 4z – 14 =0 – общее уравнение плоскости.

Задавая различные значения А, В, С, получим уравнения плоскостей, проходящих через заданную точку. Совокупность всех плоскостей, проходящих через заданную точку, называют **связкой** плоскостей.

Пример 3: Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки

М1(1, -1, 0), М2(2, 1, -3) и М3(-1, 0, 1).

Решение: . Нормальный вектор плоскости находится с помощью векторного произведения

=, значит 5(х – 2) + 5(у- 1) + 5(z + 3)=0 или

5х + 5у +5z -10 -5 +15=0 → х + у + z =0 – искомое уравнение плоскости.

1. Частные случаи: Ах + Ву + С z +D =0 общее уравнение плоскости. **(2)**

D=0 → Ax + By + Cz = 0 – плоскость проходит через начало координат.

A=0 → By + Cz + D = 0 – плоскость ││оси Ох

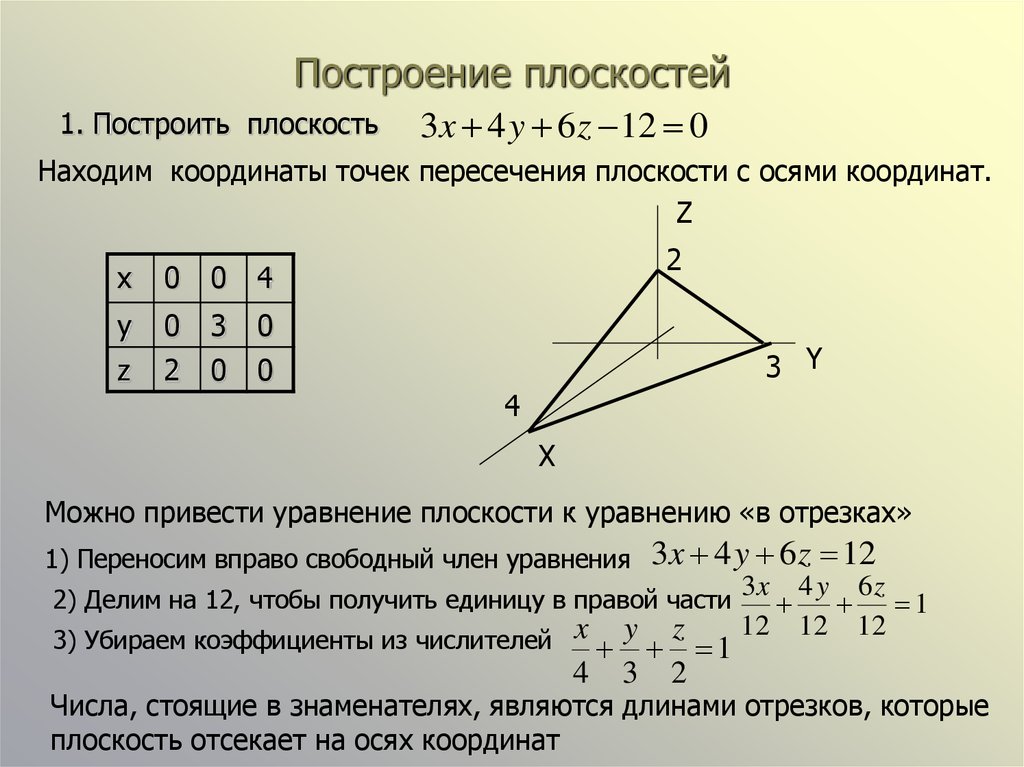
A=0, D = 0→ By + Cz = 0 – плоскость проходит через ось Ох

X=0 –уравнение координатной плоскости yOz

Y=0 - уравнение координатной плоскости xOz

Z = 0 - уравнение координатной плоскости xOy.

Точка пересечения трех плоскостей находится решением системы трех уравнений.



Угол между двумя плоскостями находится как угол между нормальными векторами.

Пример 4: Найти угол между плоскостями 2х + 3у +6z - 6 = 0 и 2х +5у -10=0

Скалярное произведение векторов

Длины векторов

**(3)**

Плоскости 2х + 5у -8z +19=0 параллельны 4x +10y – 16z + 4 =0 так как

.

Плоскости 2х + 5у -8z +19=0 и 3х +2у -2z-15=0 перпендикулярны, так скалярное произведение их нормальных векторов = 0.

2\*3 +5\*2- 8\*2 = 0.

**Прямая в пространстве**

А) Линия в пространстве - это пересечение двух поверхностей.

Рассмотрим две плоскости – пересекаясь, они образуют прямую, поэтому

**(4)**

Уравнения (4) называют общими уравнениями прямой в пространстве (прямая задается пересечением двух плоскостей).

Пример 5: Построить прямую

Система имеет множество решений (переменных больше, чем уравнений). Для построения прямой достаточно знать две точки (одну переменную можно взять произвольно, например у=0, тогда, складывая уравнения, получим 2х + 2=0, откуда х=-1, значит z = 4. Получим точку (-1, 0, 4)-точка лежит в плоскости хОz. Вторую точку находим по аналогии: пусть z=0

Вычитая второе уравнение из первого, получим 4у-8 = 0 или у=2, тогда х=1. Вторая точка (1, 2, 0)-точка лежит в плоскости хОу. Эти две точки (пересечение с координатными плоскостями) называют **следом** прямой.

Можно найти и третий след – пересечение с третьей координатной плоскостью.

Б) Положение прямой в пространстве вполне определяется задание какой-нибудь точки и направляющего вектора. По аналогии с плоскостью, на прямой берем фиксированную М0(х0,у0, z0) и переменную M(x, y, z) точки, и вектор, параллельный прямой тогда

(**5)**

Уравнения (5) называют каноническими уравнениями прямой в пространстве.

=t → **(6)**

Уравнения (6) называют параметрическими уравнениями прямой в пространстве.

формальная запись не означает деление на 0. В знаменателях даются координаты направляющего вектора.

**В) Взаимное расположение прямой и плоскости**

Даны плоскость Ах + Ву + С z +D =0 и прямая

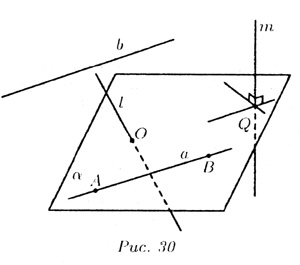
Нормальный вектор плоскости , направляющий вектор прямой .

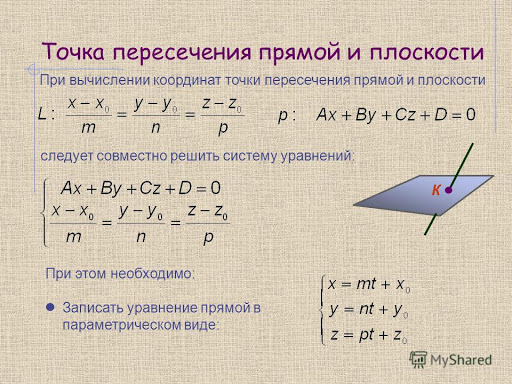
Если плоскость параллельна прямой, то их векторы перпендикулярны, т.е.

Am +Bn + Cp =0. (скалярное произведение векторов равно 0)

Если прямая перпендикулярна плоскости, то их векторы коллинеарны, т.е.

Если прямая пересекает плоскость, то угол между прямой и плоскостью находим как угол между векторами, нахождение точки пересечения рассмотрим на примере.





Пример 7: Найти точку пересечения прямой и плоскости

2х + 3у + z - 1=0.

Решение: перейдем к параметрическим уравнениям прямой

Подставим эти уравнения в уравнение плоскости

2(t+1) + 3(-2t-1) + 6t – 1=0, 2t – 6t + 6t + 2 – 3 – 1 =0 t= 1, возвращаемся к параметрическим уравнениям

Ответ: искомая точка (2, - 3, 6). Проверка ???

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Составить уравнения прямой, проходящей через две точки: А(3, 5, -4) и В(-5, 0, 7)
2. Найти точку пересечения прямой с плоскостью 7x + y +4z – 47=0.
3. - параметрические уравнения прямой, перейти к каноническим.
4. Найти точки пересечения плоскости 2х – 4у + 5z – 20 =0 с координатными осями, изобразить плоскость в системе координат.
5. Прямая задана общими уравнениями, найти две точки на прямой и построить в системе координат.

**Решения:**

**1.**

Уравнения прямой с направляющим вектором:

**2**. Найти точку пересечения прямой с плоскостью 7x + y +4z – 47=0.

Запишем параметрические уравнения

7(-t+3) + (5t+4) + 4(2t+4)-47 = 0 t = 1

Подставляем в уравнения Ответ: (2; 9; 6)

1. Найти **точки** **пересечения** плоскости 2х – 4у + 5z – 20 =0 с координатными осями, изобразить плоскость.

Пусть у = z = 0 x = 10

Пусть у = x = 0 z = 4

Пусть x = z = 0 y = -5

1. Прямая задана общими уравнениями, найти две точки на прямой и построить в системе координат.

Пусть у = 0, тогда из первого уравнения находим х = -2, и из второго уравнения - 2 + 5z – 23 = 0 находим z = 5. (-2; 0; 5).

Пусть z = 0, тогда из второго уравнения находим х = 23, и из первого уравнения 23 – 5у + 2 = 0 находим у = 5. (23; 5; 0)

Пусть х = 0, тогда из первого уравнения находим у = 2/5, и из второго уравнения находим z = 23/5. (0; 0.4; 4.6)

Или х = 8, тогда у = 2, z = 3. (8; 2; 3).

Задавая произвольные значения одной из переменных, находим две другие. Вариантов может быть много (у каждого свой вариант). Отмечаем в системе координат какие-нибудь точки и через них проводим прямую.