**№5 Уравнение плоскости в пространстве**

1. Уравнение поверхности.

Уравнение F(x, y, z)=0 определяет в пространстве некоторую поверхность – множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению. Часто поверхность задается не уравнением, а как множество всех точек, обладающих некоторым свойством. В этом случае находят уравнение поверхности, исходя из геометрических свойств.

Пример 1: Найти уравнение шаровой поверхности радиуса R с центром в точке О0(х0, у0, z0).

Решение: Пусть М(х, у, z)- произвольная ( переменная) точка этой поверхности. Тогда по определению сферы │О0М│= R. Если центр сферы находится в начале координат, то x2+y2+z2= R2-уравнение сферы с центром в начале координат.

Для произвольной точки получим $\overbar{О\_{0}М}=\left(х-x\_{0}, у-y\_{0}, z-z\_{0}\right)$ │О0М│= $\sqrt{\left(x-x\_{0}\right)^{2}+\left(y-y\_{0}\right)^{2}+\left(z-z\_{0}\right)^{2}}$ →

$\left(x-x\_{0}\right)^{2}+\left(y-y\_{0}\right)^{2}+\left(z-z\_{0}\right)^{2}=R^{2}$ - уравнение сферы с центром в точке О0(х0, у0, z0) и радиусом R.

1. Рассмотрим в пространстве плоскость с нормальным вектором $\overbar{N}=\left(A, B, C\right)$ Нормальный вектор – это вектор перпендикулярный плоскости.



Так как вектор перпендикулярен плоскости, то он перпендикулярен любому вектору, лежащему в этой плоскости. Пусть М0(х0, у0, z0)-фиксированная точка плоскости, а точка Р(х, у, z)-переменная точка плоскости. Вектор $\overbar{М\_{0}Р}=\left(x-x\_{0}, y-y\_{0}, z-z\_{0}\right).$ Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0, т.е. А(х- х0) + В(у- у0)+С(z- z0) =0 **(1)**

Уравнение (1) – это уравнение плоскости в пространстве, перпендикулярной заданному вектору и проходящей через заданную точку, это любое уравнение линейное, относительно координат. Координаты любой точки, лежащей в плоскости, удовлетворяют этому уравнению.

Пример 2: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М(1, -2, 3) и перпендикулярно вектору $\overbar{N}=2\overbar{i}+4\overbar{k} т.е. \overbar{N}=\left(2,0,4\right)$.

Составляем уравнение плоскости, подставляя заданные числа в уравнение (1): 2(х – 1) + 0(у +2)+ 4(z-3)=0, раскрывая скобки, получим

 2х + 4z – 14 =0 – общее уравнение плоскости.

Задавая различные значения А, В, С, получим уравнения плоскостей, проходящих через заданную точку. Совокупность всех плоскостей, проходящих через заданную точку, называют **связкой** плоскостей.

Пример 3: Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки

М1(1, -1, 0), М2(2, 1, -3) и М3(-1, 0, 1).

Решение: $\overbar{М\_{1}М\_{2}}=\left(1, 2, -3\right)$ $\overbar{М\_{1}М\_{3}}=\left(-2, 1,1\right)$. Нормальный вектор плоскости находится с помощью векторного произведения

$$\overbar{N}=\overbar{M\_{1}M\_{2}}х\overbar{M\_{1}M\_{3}}=\left|\begin{matrix}i&j&k\\1&2&-3\\-2&1&1\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}2&-3\\1&1\end{matrix}\right|i-\left|\begin{matrix}1&-3\\-2&1\end{matrix}\right|j+\left|\begin{matrix}1&2\\-2&1\end{matrix}\right|k=$$

$\overbar{N}=\left(5,5,5\right)$=$\left(A, B, C\right)$, значит 5(х – 2) + 5(у- 1) + 5(z + 3)=0 или

5х + 5у +5z -10 -5 +15=0 → х + у + z =0 – искомое уравнение плоскости.

1. Частные случаи: Ах + Ву + С z +D =0 общее уравнение плоскости. **(2)**

D=0 → Ax + By + Cz = 0 – плоскость проходит через начало координат.

A=0 → By + Cz + D = 0 – плоскость ││оси Ох

A=0, D = 0→ By + Cz = 0 – плоскость проходит через ось Ох

X=0 –уравнение координатной плоскости yOz

Y=0 - уравнение координатной плоскости xOz

Z = 0 - уравнение координатной плоскости xOy.

Точка пересечения трех плоскостей находится решением системы трех уравнений.



Угол между двумя плоскостями находится как угол между нормальными векторами.

Пример 4: Найти угол между плоскостями 2х + 3у +6z - 6 = 0 и 2х +5у -10=0

$$\overbar{N\_{1}}= \left(2, 3, 6\right) \overbar{N\_{2}}=\left(2, 5, 0\right)$$

Скалярное произведение векторов $\overbar{N\_{1}}∙\overbar{N\_{2}}=2∙2+3∙5+6∙0=19$

Длины векторов $\left|\overbar{N\_{1}}\right|=\sqrt{2^{2}+3^{2}+6^{2}}=\sqrt{49}=7$

$$\left|\overbar{N\_{2}}\right|=\sqrt{2^{2}+5^{2}+0^{2}}=\sqrt{29}$$

$\cos(∝)=\frac{\overbar{N\_{1}}∙\overbar{N\_{2}}}{\left|\overbar{N\_{1}}\right|∙\left|\overbar{N\_{2}}\right|}=\frac{19}{7\sqrt{29}}=0.5\rightarrow α=60°$ **(3)**

Плоскости 2х + 5у -8z +19=0 параллельны 4x +10y – 16z + 4 =0 так как

$\frac{2}{4}=\frac{5}{10}=\frac{-8}{-16}$.

Плоскости 2х + 5у -8z +19=0 и 3х +2у -2z-15=0 перпендикулярны, так скалярное произведение их нормальных векторов = 0.

2\*3 +5\*2- 8\*2 = 0.

 **Прямая в пространстве**

А) Линия в пространстве - это пересечение двух поверхностей.

$$\left\{\begin{array}{c}F\left(x,y, z\right)=0\\Ф\left(x,y,z\right)=0\end{array}\right.$$

Рассмотрим две плоскости – пересекаясь, они образуют прямую, поэтому

$\left\{\begin{array}{c}A\_{1}х+B\_{1}у+C\_{1}z+D\_{1}=0\\A\_{2}x+B\_{2}y+C\_{2}z+D\_{2}=0\end{array}\right.$ **(4)**

Уравнения (4) называют общими уравнениями прямой в пространстве (прямая задается пересечением двух плоскостей).

Пример 5: Построить прямую $\left\{\begin{array}{c}x+y+z-3=0\\x-3y-z+5=0\end{array}\right.$

Система имеет множество решений (переменных больше, чем уравнений). Для построения прямой достаточно знать две точки (одну переменную можно взять произвольно, например у=0, тогда, складывая уравнения, получим 2х + 2=0, откуда х=-1, значит z = 4. Получим точку (-1, 0, 4)-точка лежит в плоскости хОz. Вторую точку находим по аналогии: пусть z=0

Вычитая второе уравнение из первого, получим 4у-8 = 0 или у=2, тогда х=1. Вторая точка (1, 2, 0)-точка лежит в плоскости хОу. Эти две точки (пересечение с координатными плоскостями) называют **следом** прямой.

Можно найти и третий след – пересечение с третьей координатной плоскостью.

Б) Положение прямой в пространстве вполне определяется задание какой-нибудь точки и направляющего вектора. По аналогии с плоскостью, на прямой берем фиксированную М0(х0,у0, z0) и переменную M(x, y, z) точки, и вектор, параллельный прямой $\overbar{S}=\left(m,n,p\right) $тогда

 $\frac{х-x\_{0}}{m}=\frac{y-y\_{0}}{n}=\frac{z-z\_{0}}{p}$ (**5)**

Уравнения (5) называют каноническими уравнениями прямой в пространстве.

$\frac{х-x\_{0}}{m}=\frac{y-y\_{0}}{n}=\frac{z-z\_{0}}{p}$ =t → $\left\{\begin{array}{c}x=x\_{0}+tm\\y=y\_{0}+tn\\z=z\_{0}+tp\end{array}\right.$ **(6)**

Уравнения (6) называют параметрическими уравнениями прямой в пространстве.

$\frac{х-x\_{0}}{0}=\frac{y-y\_{0}}{n}=\frac{z-z\_{0}}{p}$ формальная запись не означает деление на 0. В знаменателях даются координаты направляющего вектора.

**В) Взаимное расположение прямой и плоскости**

Даны плоскость Ах + Ву + С z +D =0 и прямая $\frac{х-x\_{0}}{m}=\frac{y-y\_{0}}{n}=\frac{z-z\_{0}}{p}$

Нормальный вектор плоскости $\overbar{N}=\left(A, B, C\right)$, направляющий вектор прямой $\overbar{S}=\left(m,n,p\right)$.

Если плоскость параллельна прямой, то их векторы перпендикулярны, т.е.

Am +Bn + Cp =0. (скалярное произведение векторов равно 0)

Если прямая перпендикулярна плоскости, то их векторы коллинеарны, т.е.

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

Если прямая пересекает плоскость, то угол между прямой и плоскостью находим как угол между векторами, нахождение точки пересечения рассмотрим на примере.





Пример 7: Найти точку пересечения прямой $\frac{х-1}{1}=\frac{у+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости

2х + 3у + z - 1=0.

Решение: перейдем к параметрическим уравнениям прямой $\left\{\begin{array}{c}х=t+1\\y=-2t-1\\z=6t\end{array}\right.$

Подставим эти уравнения в уравнение плоскости

2(t+1) + 3(-2t-1) + 6t – 1=0, 2t – 6t + 6t + 2 – 3 – 1 =0 t= 1, возвращаемся к параметрическим уравнениям $\left\{\begin{array}{c}х=2\\у= -3\\z=6\end{array}\right.$

Ответ: искомая точка (2, - 3, 6). Проверка ???

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Составить уравнения прямой, проходящей через две точки: А(3, 5, -4) и В(-5, 0, 7)
2. Найти точку пересечения прямой $\frac{х-3}{-1}=\frac{у-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ с плоскостью 7x + y +4z – 47=0.
3. $ \left\{\begin{array}{c}x=3t-3\\y=-5t-2/3\\z=-9t\end{array}\right.$ - параметрические уравнения прямой, перейти к каноническим.
4. Найти точки пересечения плоскости 2х – 4у + 5z – 20 =0 с координатными осями, изобразить плоскость в системе координат.
5. $\left\{\begin{array}{c}x-5y+2=0\\x+5z-23=0\end{array}\right. $ Прямая задана общими уравнениями, найти две точки на прямой и построить в системе координат.

**Решения:**

**1.**

$\overbar{S}=\overbar{AB}=\left(-5-3;0-5;7-\left(-4\right)\right)=\left(-8;-5;11\right)$

Уравнения прямой с направляющим вектором: $\frac{х-x\_{0}}{m}=\frac{y-y\_{0}}{n}=\frac{z-z\_{0}}{p}$

 $\frac{х-3}{-8}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+4}{11}$

**2**. Найти точку пересечения прямой $\frac{х-3}{-1}=\frac{у-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ с плоскостью 7x + y +4z – 47=0.

Запишем параметрические уравнения $\left\{\begin{array}{c}x=-t+3\\y=5t+4\\z=2t+4\end{array}\right.$

7(-t+3) + (5t+4) + 4(2t+4)-47 = 0 t = 1

Подставляем в уравнения $\left\{\begin{array}{c}x=-1+3=2\\y=5∙1+4=9\\z=2∙1+4=6\end{array}\right.$ Ответ: (2; 9; 6)

$3. \left\{\begin{array}{c}x=3t-3\\y=-5t-2/3\\z=-9t\end{array}\right.$ $t=\frac{x+3}{3}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-5}=\frac{z}{-9}$

1. Найти **точки** **пересечения** плоскости 2х – 4у + 5z – 20 =0 с координатными осями, изобразить плоскость.

Пусть у = z = 0 x = 10

Пусть у = x = 0 z = 4

Пусть x = z = 0 y = -5

1. $\left\{\begin{array}{c}x-5y+2=0\\x+5z-23=0\end{array}\right. $ Прямая задана общими уравнениями, найти две точки на прямой и построить в системе координат.

Пусть у = 0, тогда из первого уравнения находим х = -2, и из второго уравнения - 2 + 5z – 23 = 0 находим z = 5. (-2; 0; 5).

Пусть z = 0, тогда из второго уравнения находим х = 23, и из первого уравнения 23 – 5у + 2 = 0 находим у = 5. (23; 5; 0)

Пусть х = 0, тогда из первого уравнения находим у = 2/5, и из второго уравнения находим z = 23/5. (0; 0.4; 4.6)

Или х = 8, тогда у = 2, z = 3. (8; 2; 3).

Задавая произвольные значения одной из переменных, находим две другие. Вариантов может быть много (у каждого свой вариант). Отмечаем в системе координат какие-нибудь точки и через них проводим прямую.