**Производные высших порядков адрес:** [**senko@uifbguep.ru**](https://e.mail.ru/compose/?mailto=mailto%3asenko@uifbguep.ru)**.**

Производная 1 порядка (первая производная):

а)

Производная второго порядка (вторая производная-производная от первой производной):

Производные третьего, четвертого порядка?

или .

**б) у = 2+3x+5, y’= 4x + 3, y” = 4, y’” = 0.**

**Сложная функция –**функция от функции.

Если *z* – функция от *у*, т.е. *z*(*y*), а *у*, в свою очередь, – функция от *х*, т.е. *у*(*х*), то функция *f*(*x*) = *z*(y(x)) называется *сложной функцией* (или *композицией*, или *суперпозицией функций*) от *х*.

В такой функции *х* – *независимая*, а *у* – *промежуточная переменная*. При этом сложная функция определена для тех значений независимой переменной, для которых значения промежуточной функции *у* входят в область определения функции *z*(*y*).

Пример: y=sin x, y=x2, y=2x – простые функции

y=sin x2, , y= - сложные функции.

Производная дифференцируемой сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточной функции по независимому аргументу:

http://school-collection.edu.ru/dlrstore-wrapper/eba4d01c-86e9-4a55-8561-6af1337bcef5/1.gif.

Рассмотрим произвольную функцию, например, такую:

.

Заметим, что аргумент  х, стоящий в правой  и левой части уравнения функции - это одно и то же число, или выражение.

Вместо переменной  х  мы можем поставить, например, такое выражение: . И тогда мы получим функцию:

Назовем выражение cosx+sinx промежуточным аргументом, а функцию f - внешней функцией. Это не строгие математические понятия, но они помогают уяснить смысл понятия сложной функции.

Чтобы найти производную сложной функции, нужно

1. Определить, какая функция является внешней и найти по таблице производных соответствующую производную.

2. Определить промежуточный аргумент.

В этой процедуре наибольшие затруднения вызывает нахождение внешней функции. Для этого используется простой алгоритм:

а. Запишите формулу функции.

b. Представьте, что вам нужно вычислить значение функции при каком-то значении х. Для этого вы подставляете это значение х в формулу функции и производите арифметические действия. То действие, которое вы делаете последним и есть внешняя функция.

**Пример 1**.

y=5^{{sin}^2{x}} - последнее действие  - возведение числа 5 в степень (сложная показательная функция).

Найдем производную этой функции. Для этого запишем промежуточный аргумент

{sin}^2{x} как Delta

Получим {(5^{Delta})}prime

Ищем в [таблице производных](https://ege-ok.ru/2012/01/31/kak-nayti-proizvodnuyu-tablitsa-proizvodnyih/)  производную показательной функции:

{(a^x)}prime={a^x}ln{a}

Получим:

{(5^{Delta})}prime={(5^{Delta})}ln5{Delta}prime={(5^{{sin}^2{x}})}ln5{({sin}^2{x})}prime     (1)

Теперь наша задача найти производную функции {sin}^2{x}

Заметим, что здесь мы опять имеем дело со сложной функцией. В этом выражении последнее действие - возведение в квадрат, а промежуточный аргумент {sin}{x}.

Получаем:

{({sin}^2{x})}prime=2{sin}{x}*{({sin}{x})}prime=

Смотрим в [таблице производных](https://ege-ok.ru/2012/01/31/kak-nayti-proizvodnuyu-tablitsa-proizvodnyih/) производную синуса:

{({sin}{x})}prime={cos}{x}

Получаем:

2{sin}{x}*{({sin}{x})}prime=2{sin}{x}*{({cos}{x})}

Таким образом,

{(5^{{sin}^2{x}})}prime={(5^{{sin}^2{x}})}ln5*{sin}{2x}

**Пример 2**

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image012.gif-сложная тригонометрическая.

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image014.gif, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя.

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image049.gif

**Пример 3.** Найти производную функции: **-сложная степенная.**

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image078.gif

**Пример 4.**

а) Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image082.gif

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image084.gif

б) Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image086.gif

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image088.gif

По правилу дифференцирования **сложной** функции http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image004.gif:

http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image006.gif

Найти следующие производные устно, в одно действие, например: http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image010.gif. Для выполнения задания нужно использовать только [**таблицу производных элементарных функций**](http://mathprofi.ru/tablica_proizvodnyh.pdf) (если она еще не запомнилась держать перед глазами)

1.http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image012.gif,  **)**

2. http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image014.gif , где ошибка?

3.  http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image016.gif,   
 ,

5.http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image020.gif **,**

6. http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image022.gif,

7.http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image024.gif,

8. http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image026.gif,

9.http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image028.gif,

10.http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image030.gif,

11.http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image032.gif,

14. http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image040.gif,

15. http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image042.gif, http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image046.gif,

16.http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image048.gif,  http://mathprofi.ru/g/slozhnye_proizvodnye_logarifmicheskaja_proizvodnaja_clip_image050.gif,

Точки перегиба и интервалы выпуклости – вогнутости графика.

1. Функция называется выпуклой вверх (выпуклой), если ее график лежит ниже любой своей касательной. Вторая производная функции в интервале выпуклости меньше нуля.
2. График функции называется выпуклым вниз (вогнутым), если он лежит выше любой своей касательной. Вторая производная функции в интервале выпуклости больше нуля.
3. Точка, в которой функция меняет направление выпуклости, называется точкой перегиба. В этой точке производная второго порядка равна нулю.

**Алгоритм исследования функции с помощью производной**

1. Найти область определения. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности.(
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты. Исследовать поведение на бесконечности.
9. Выбрать дополнительные точки и вычислить их координаты.
10. Построить график и асимптоты.

**Пример 1:** *Провести полное исследование и построить график функции*

* 1. Область определения функции. Так как функция представляет собой дробь, нужно найти нули знаменателя.

1- x=0,⇒x=1.

Исключаем единственную точку x=1 из области определения функции и получаем: D(y)=(−;1)∪(1;+).

Так как х = 1 – точка разрыва, то х = 1 –вертикальная асимптота (график функции эту прямую не пересекает, но неограниченно приближается к ней)

* 1. Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем x=0: получим **точку (0; 8).**



* 1. Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox, для чего положим y=0: х2 + 8 = 0 - уравнение не имеет корней, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

Заметим, что любых x. Поэтому при x∈(−;1) функция y>0 (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при x∈(1;+) функция y<0 (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

* 1. Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

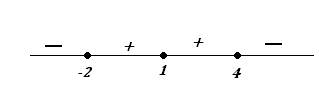




Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки (точки, в которых  y′=0):

D=36

Получили три критические точки: x = −2, x = 1(точка разрыва), x=4. Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При  производная  y′ < 0, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При   производная  y′ > 0, функция возрастает.

При этом x=−2 - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает),  x=4 - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Найдем значения функции в этих точках:

4 -8

Таким образом, точка **минимума (−2;4**), точка **максимума (4;−8**).

Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:







Приравняем вторую производную к нулю:



Полученное уравнение не имеет корней, поэтому точек перегиба нет. При этом когда , то есть функция вогнутая. Когда , то есть функция выпуклая.

Исследуем поведение функции на бесконечности, то есть при  .



Так как пределы бесконечны, горизонтальных асимптот нет.

Попробуем определить наклонные асимптоты вида y = kx + b. Вычисляем значения k, b по известным формулам:



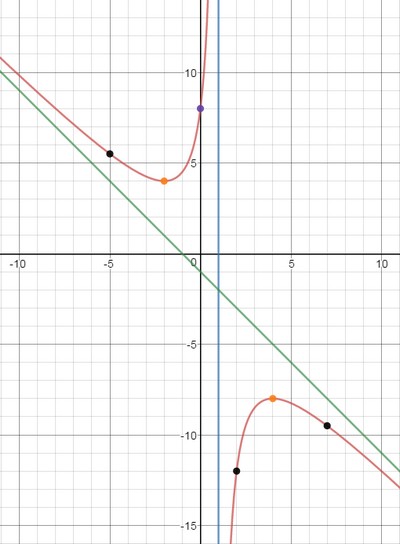


Получили, у что функции есть одна наклонная асимптота y= − x − 1.

Дополнительные точки. Вычислим значение функции в некоторых других точках, чтобы точнее построить график.

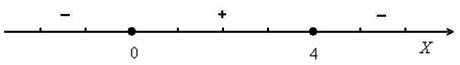
y(−5)=5.5; y(2)=−12; y(7)=−9.5.

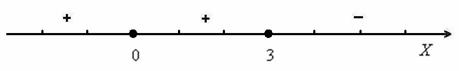
По полученным данным построим график, дополним его асимптотами x=1 (синий),   y=−x −1 (зеленый) и отметим характерные точки (фиолетовым пересечение с осью ординат, оранжевым экстремумы, черным дополнительные точки):



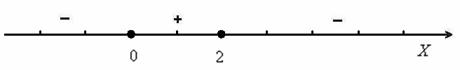
**Пример 2:  Проведём исследование функции:**

***Решение***:  
1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, .  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image257.gif*  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image259.gif*, значит, данная функция не является четной или нечетной.  
Функция непериодическая.

2) Точки пересечения графика с координатными осями.  
График *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0003.gif* проходит через начало координат.  
С осью *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image265.gif*  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image267.gif*  
Определим знаки *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0004.gif*:  
**  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image271.gif*, если *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image273.gif*,  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image210_0000.gif*, если *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image276.gif*.

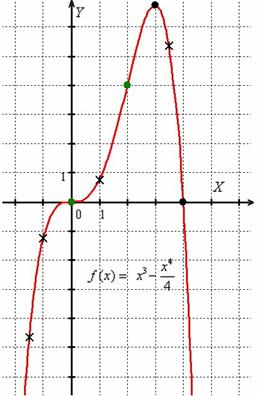
3) Возрастание, убывание, экстремумы функции.  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image278.gif*   
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image280.gif* – критические точки.  
Определим знаки *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image282.gif*:  
**  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image132_0005.gif* возрастает на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image287.gif* и убывает на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image289.gif*.  
В точке *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image291.gif* функция достигает максимума: *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image293.gif*

5**) Выпуклость, вогнутость**, перегибы графика.  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image295.gif*   
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image297.gif* – критические точки.  
Определим знаки *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image243_0000.gif*:

**  
График функции является выпуклым на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image168_0000.gif* и вогнутым на *http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image170_0000.gif*.

В обеих критических точках существуют перегибы графика.

*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image303.gif*

6) Найдем дополнительные точки:  
*http://mathprofi.ru/k/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika_clip_image305.jpg*  
Выполним чертёж:  
**

**Пример 5: Найти угловой коэффициент касательной к графику функции** f(x) = 3х2+40х -10 в точке х0 = -1.

**Пример 6: Напишите уравнение касательной** к графику функции f(x) = 2x2 - 2x +3 в точке с абсциссой х0= - 2.

Угловой коэффициент

Уравнение касательной: , где

**Пример 7: Найти наибольшее значение** функции *f(x)=х3 -3х2 + 2* на отрезке *[-2; 3].*

Решение: 3x(x- 2) = 0 → x1=0, x2 = 2 – обе точки входят в заданный интервал. Находим значения функции в найденных точках и на концах интервала, выбираем самое большое и самое маленькое значения.

у(0) = 03- 3\*02 + 2 = 2,

у(2) = 23 – 3\*22 + 2 = 8 – 12 + 2 = - 2,

у(-2) = (-2)3 – 3\*(-2)2 + 2 = -8 – 12 + 2 = - 18, - наименьшее**.**

у(3) = 33 – 3\*32 +2 = 27 – 27 + 2 = 2. **у(0) = у(3) = 2 – наибольшее.**

Задания для самостоятельного решения:

Найти производные функций:

1. Найти производную третьего порядка для функции у = 4х4 + 5х3  и вычислить ее в точке х0 = -1
2. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции f(x) = 4 - x2 в точке х0 = -3.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции f(x) = x2 - 2x в точке с абсциссой х0=-2.
4. Определить интервалы возрастания и убывания функции *у = 3х3- 9х.*
5. Исследовать функцию и построить график *f(x) = 12х –9х2 + 2х3.*

**(в 11 найти интервалы монотонности, экстремумы, интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба)**

**Критерии оценки:**

* **оценка «отлично» выставляется студенту, если все задания выполнены правильно;**
* **оценка «хорошо» - если правильно выполнено 75 % заданий;**
* **оценка «удовлетворительно» - если правильно выполнено 50 % заданий;**
* **оценка «неудовлетворительно» - если выполнено менее 40 % заданий.**