**Кривые второго порядка**

*Общим уравнением второго порядка* называется уравнение вида:

Ax2+2Bxy+Cy2+2Dx+2Ey+F=0 (1)

где коэффициенты *A,B,C* одновременно не равны нулю.  
Линии, определяемые такими уравнениями, называются *кривыми второго порядка*.  
*Центром* некоторой линии называется такая точка плоскости, по отношению к которой точки этой линии расположены симметрично парами.  
Линии второго порядка, обладающие единственным центром, называются *центральными*.

Классификация кривых второго порядка:

* [Эллипс](https://math.semestr.ru/line/ellipse.php)
* [Окружность](https://math.semestr.ru/line/circle.php)
* [Гипербола](https://math.semestr.ru/line/hyperbole.php)
* [Парабола](https://math.semestr.ru/line/parabola.php)
  1. **Уравнение окружности**

**Определение: Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от одной, называемой центром.**

Пусть М(х, у)-переменная точка, лежащая на окружности, М0(х0; у0) –центр окружности, тогда .

, так как

, то (2)

Уравнение (2) – уравнение окружности с центром в точке М0 и радиусом

- уравнение окружности с центром О(0; 0) (3)

Если в уравнении (2) раскрыть скобки, то получим

. Сравнивая (1) и (3), видим, что в уравнении окружности отсутствует слагаемое с произведением Х\*У и коэффициенты при квадратах координат равны (А= С). Это общее свойство всех уравнений окружности.

Обратная задача: проверить, задает ли кривая второго порядка окружность?

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение х2 + у2 – 2х + 4у – 11=0, группируем слагаемые по переменным (х2 – 2х) + (у2 + 4у) = 11, дополняем до полного квадрата

(х2 – 2х +1)- 1 + (у2 + 4у + 4)- 4 = 11, сворачиваем по формуле

(х – 1)2 + (у + 2)2= 16, то есть получили уравнение окружности с центром (1; -2) и радиусом R= 4.

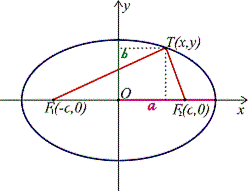
Пример 2. Рассмотрим уравнение х2 + у2 + 6х - 6у + 22=0, группируем слагаемые по переменным и дополняем до полного квадрата (х2 + 6х + 9) – 9 + (у2 – 6у + 9) – 9 = -22. → (х + 3)2 + (у – 3)2 = - 4 (сумма положительных чисел не может быть отрицательной, данное уравнение не задает окружность).

* 1. **Эллипс** **– множество точек на плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная 2а, расстояние меду фокусами равно 2с, для эллипса 2а .**

**Определение.**[**Эллипс**](https://www.mathelp.spb.ru/videomath8.htm)**-**это кривая, которая имеет уравнение https://www.mathelp.spb.ru/book1/ellips.files/Eqn001.gif.

Он имеет два фокуса**. Фокусами**называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.

## Чертеж эллипса



F1 , F2 – фокусы . F1 = ( c ; 0); F 2 (- c ; 0)

с – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

**Теорема.**Фокусное расстояние и полуоси связаны соотношением:

a2 = b 2 + c 2.

**Определение.**Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

е = с/ a .

Т.к. с < a , то е < 1.

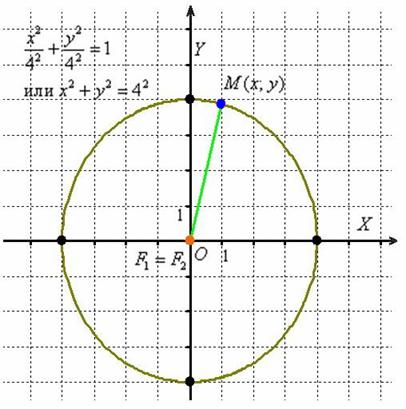
**Определение.**Величина k = b / a называется **коэффициентом сжатия**, а величина 1 – k = ( a – b )/ a называется **сжатием**.

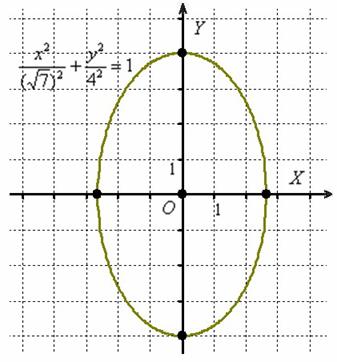
Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: k2 = 1 – e 2 .

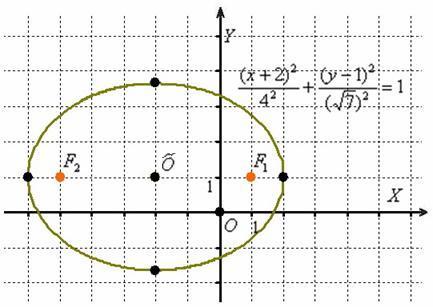
Если a = b ( c = 0, e = 0, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки М(х 1 , у 1 ) выполняется условие: https://www.mathelp.spb.ru/book1/ellips.files/Eqn007.gif, то она находится внутри эллипса, а если https://www.mathelp.spb.ru/book1/ellips.files/Eqn008.gif, то точка находится вне его.

Окружность – частный случай эллипса (полуоси равны)

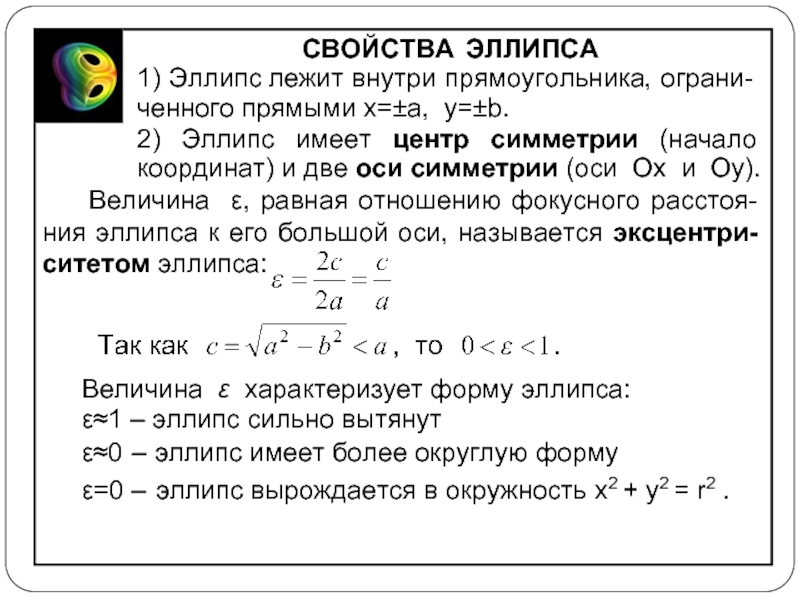




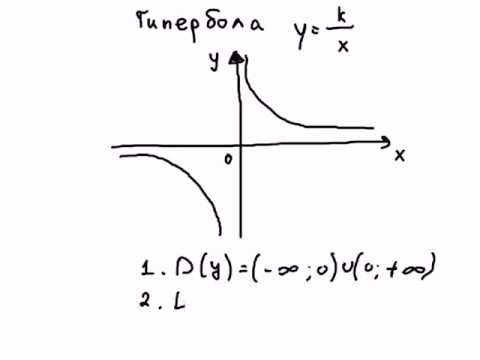
М0(-2; 1)-центр

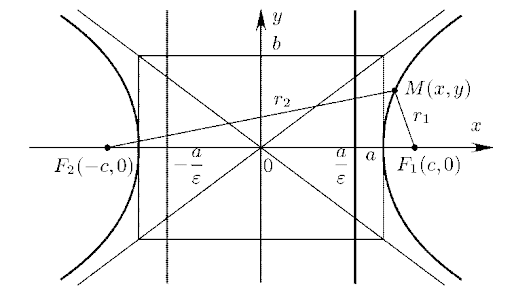
а = 4-большая полуось

в = - малая полуось

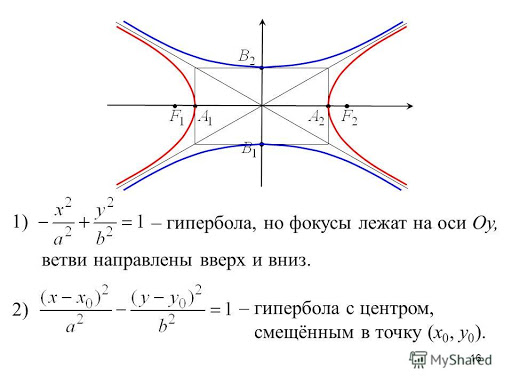


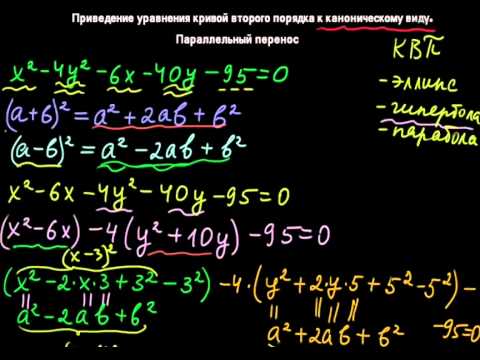
* 1. **Гипербола** – множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2а (а 0, а с

 обычная школьная гипербола





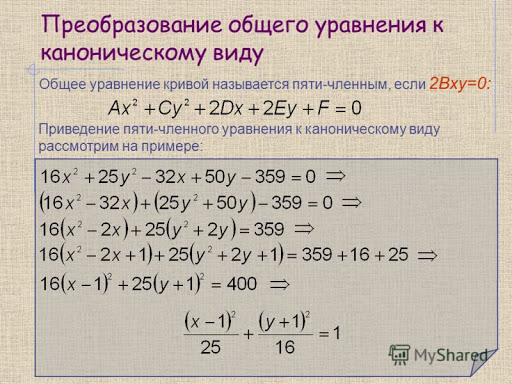




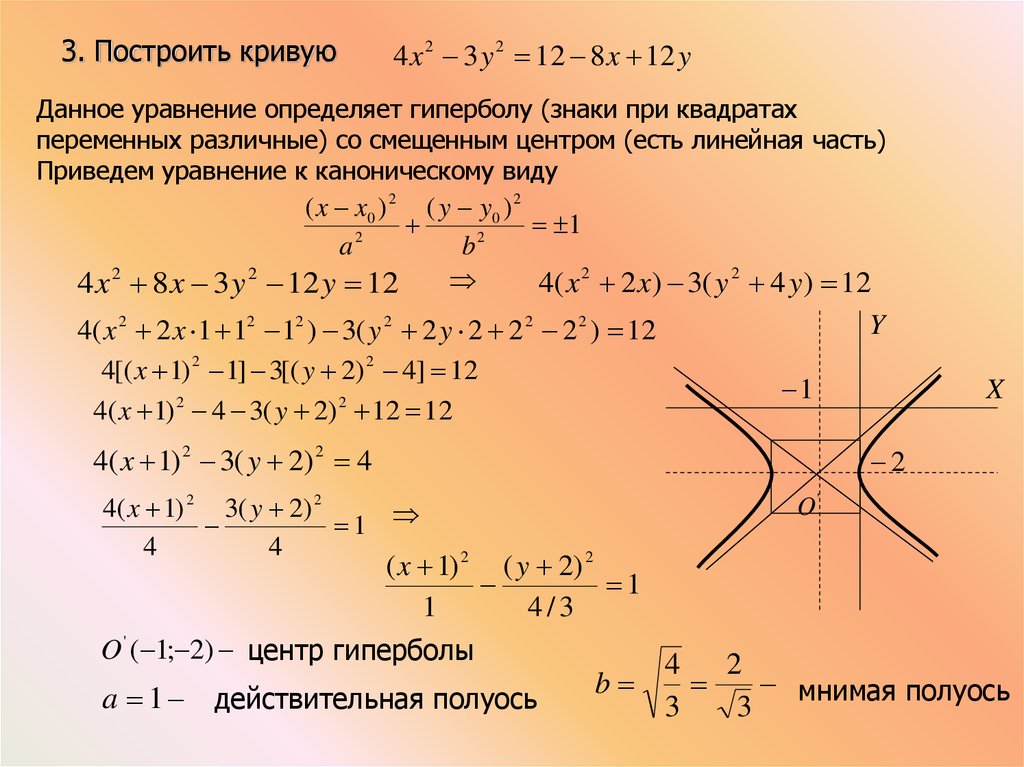
Сворачиваем формулы : (х – 3)2 – 4(у + 5)2 -9 -4 (-25)-95=0

(х – 3)2 – 4(у + 5)2 =4 или делим обе части на 4:

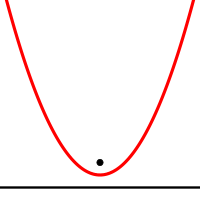
уравнение гиперболы с центром (3; -5), а=2, в=1.



Это уравнение эллипса с центром (1;-1), а=5, в =4.



* 1. **Пара́бола** — [геометрическое место точек](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BE_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%B5%D0%BA), равноудалённых от данной [прямой](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B0%D1%8F) (называемой [директрисой](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%80%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) параболы) и данной [точки](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) (называемой [фокусом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D1%81%D0%B5%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) параболы).



Точка параболы, ближайшая к её директрисе, называется *вершиной* этой параболы. Вершина является серединой перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису.

Каноническое уравнение параболы в [прямоугольной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) [системе координат](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82):

{\displaystyle \textstyle y^{2}=2px,p>0}у2 = 2рх  (или {\displaystyle \textstyle x^{2}=2py}х2 = 2ру, если поменять местами оси). р

Число *p* называется фокальным параметром, оно равно расстоянию от фокуса до директрисы. Поскольку каждая точка параболы равноудалена от фокуса и директрисы, то и вершина — тоже, поэтому она лежит между фокусом и директрисой на расстоянии {\displaystyle {\frac {p}{2}}} от обоих.

Задания для самостоятельной работы:

Привести уравнение кривой к каноническому виду, определить вид кривой, сделать рисунок:

1. 2х2 +3у2 -4х +6у- 7 = 0
2. 2х2 - 9у2 -8х + 54у – 91 = 0
3. х2 - у2 -4х +2у – 4 = 0
4. у2 – 20у + 4х + 116 = 0,
5. 4х2 + 24х + у2 – 24у +176 = 0.
6. х2 – 6х + у2 +8 = 0
7. х2 + 6х + у2 +8 = 0
8. О(-3; 4), R=6, составить уравнение окружности.
9. а=3, в=5, центр (2; -1)-составить уравнения эллипса и гиперболы.