1. Контрольная работа № 1.
«МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ»

1.1.Основные понятия

Определение. **Матрицей** размера $m \times n$, где m – число строк, n – число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m = n$), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E,$$ называется **единичной матрицей**.

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Определение. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

Основные действия над матрицами

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. *Суммой (разностью)* матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$C = A + B = B + A.$$

Операция *умножения (деления)* матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Определение: *Произведением* матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C; \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, *число столбцов первой из которых равно числу строк второй.*

Пример2. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет размерность 3×2, матрица B – размерность 2×2. Следовательно, произведение AB существует и его размерность будет 3×2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = C$$

Каждый элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

$c_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19$

$c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$

$c_{21} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 31$

$c_{22} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$

$c_{31} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 6$

$c_{32} = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$

Таким образом $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 31 & 9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.

Определители 2-го и 3-го порядка

Определение. Определитель 2-го порядка матрицы A вычисляется по формуле

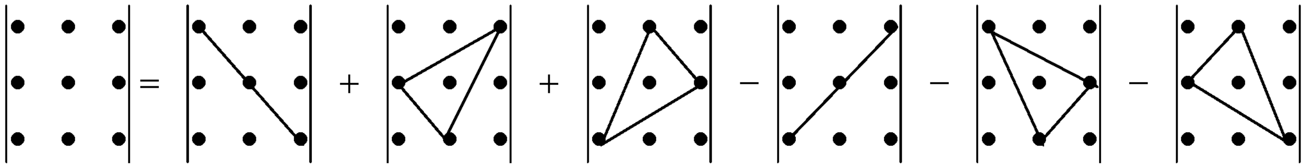
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определение. Определитель 3-го порядка вычисляется по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

Эта формула выражает правило треугольников, которое символически можно записать так:



Пример 3. Вычислить определитель матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 4 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 4 = -24$$

Определение. Пусть A – квадратная матрица. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} называется определитель, полученный из определителя матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, в матрице A (пример 3) $M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$.

Определение. Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} называется

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Например $\quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 4$,

$\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = 3$.

Разложение определителя по элементам строки или столбца.

Имеет место следующее свойство:

определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример 4. Вычислить определитель разложением по 1-й строке

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -(20 - 42) = 22$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

Тогда $\Delta = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 22 + 3 \cdot (-18) = -24$.

Это свойство применяется для вычисления определителей выше 3-го порядка (пример 5). Определители высоких порядков можно вычислить путем приведения матрицы к треугольному виду. Для этого перечислим некоторые свойства определителя.

Свойства определителя

1. Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы A^T: $\det A = \det A^T$ (это свойство означает равноправность строк и столбцов).
2. Если две строки (столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.
3. Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны или равны, то определитель равен нулю.
4. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число (т.е. общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя), например,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & k \cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k \cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k \cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца)равны нулю, то определитель равен нулю.
6. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей, т.е. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
7. Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы какой-либо другой строки (столбца), умноженные на произвольное число, то определитель не изменится. Например,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Пример 5. Вычислить определитель.
Действия со строками определителя указаны справа.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 20 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-3I \\ IV+I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV+II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} III+12IV =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{vmatrix} = -1\cdot(-5)\cdot(-1)\cdot 32 = -160$$

Обратная матрица

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E – единичная матрица того же самого порядка, то матрица X называется *обратной* к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^*, \quad \text{где } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A^* называется *присоединенной* матрицей. A^* составлена из алгебраических дополнений к элементам и затем транспонирована.

Пример 6. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\det A = 4 - 6 = -2$$

$$A_{11} = 4,\ A_{12} = -3,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 1,$$

$$\text{тогда } A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{3} & +3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

См. также пример 9.

Базисный минор матрицы. Ранг матрицы

Минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких-либо выбранных s строк и s столбцов.

Определение. В матрице порядка $m \times n$ минор порядка r называется *базисным*, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются *базисными*.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется *рангом* матрицы и обозначается rgA.

Определение. *Элементарными преобразованиями* матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
5) транспонирование;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями. С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Пример 7. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \quad rgA = 2.$$

Пример 8. Найти ранг матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 9 & 6 & -7 \\ 2 & 8 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения ранга матрицы достаточно привести ее к ступенчатому виду. Матрица называется ступенчатой, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк. Чтобы привести матрицу к ступенчатой форме, совершим над ее строками элементарные преобразования. Они указаны справа от соответствующей строки. Например, $II - 2I$ – из 2-й строки вычитаем 1-ю строку, умноженную на 2 и т. д.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 9 & 6 & -7 \\ 2 & 8 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II \quad -I \\ III \quad -2I \\ IV \quad -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & 9 \\ 0 & -4 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III \quad +3II \\ IV \quad +2II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, $rgQ = 2$.

1.2. Теоретические вопросы

1. Записать формулы вычисления определителей 2-го и 3-го порядка.
2. Дать определения минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
3. Написать формулу разложения определителя 4-го порядка по 1-й строке.

4. Дать определения суммы двух матриц, произведения матрицы на число.

5. При каком условии возможно умножение двух матриц? Что называется произведением матриц?

6. Какое преобразование матицы называется транспонированием?

7. Дать определение обратной матрицы. При каком условии матрица имеет обратную? Записать формулу вычисления обратной матрицы.

8. Что называется рангом матрицы? Какие преобразования не изменяют ранга матрицы?

9. Как вычисляется ранг матрицы?

1.3. Указания к решению задач

Пример 9. Вычислить определитель матрицы путем разложения его по строке (столбцу).

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

Решение: Для разложения определителя можно выбрать любую строку (столбец). В данном примере разложим определитель по элементам 2-й строки, т. к. в ней содержится нулевой элемент $(a_{22}=0)$.

Формула разложения определителя по 2-ой строке:

$\det A = a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24} = 1A_{21}+0+5A_{23}+2A_{24}$,

где $A_{2i}\,(i=1...4)$ – алгебраические дополнения к элементам a_{2i}.

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=-(-11)=11$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}=-(-9)=9$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 0\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}=-16$$

$\det A = 1\cdot 11+5\cdot 9+2\cdot(-16)=24$.

Пример 10. Для матриц A, B, C найти: а) $2A+3B$, б) $A\cdot C^T$, в) A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 9 & 5 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ -3 & 4 & 6\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение:

а) $2A+3B=\begin{pmatrix}4 & 6 & -2\\ 18 & 10 & 6\\ 8 & 0 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 3 & 15\\ -9 & 12 & 18\\ 0 & 9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 9 & 13\\ 9 & 22 & 24\\ 8 & 9 & -4\end{pmatrix}.$

б) Транспонируем матрицу C.

$$C^T=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Заметим, что C^T имеет размерность 3×2, A – размерность 3×3. Следовательно, произведение AC^T существует и имеет размерность 3×2.

$$AC^T=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 9 & 5 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{pmatrix}$$

Каждый элемент α_{ij} $(i=1,2,3,\ j=1,2)$ равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы C^T.

$\alpha_{11}=2\cdot 2+3(-3)+(-1)\cdot 1=-6$

$\alpha_{12}=2\cdot 4+3\cdot 5+(-1)\cdot 1=22$

$\alpha_{21}=9\cdot 2+5(-3)+3\cdot 1=6$

$\alpha_{22}=9\cdot 4+5\cdot 5+3\cdot 1=64$

$\alpha_{31}=4\cdot 2+0\cdot(-3)+(-2)\cdot 1=6$

$\alpha_{32}=4\cdot 4+0\cdot 5+(-2)\cdot 1=14$

$$AC^T=\begin{pmatrix}-6 & 22\\ 6 & 64\\ 6 & 14\end{pmatrix}.$$

в) Проверим, выполняется ли достаточное условие существования обратной матрицы

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 9 & 5 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{vmatrix}=90$$

$\det A\neq 0$, следовательно A^{-1} существует. Найдем присоединенную матрицу A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Здесь A_{ij} – алгебраические дополнения к соответствующим элементам a_{ij} матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 30 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -17$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 30 & 0 & -15 \\ -20 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*, \qquad A^{-1} = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 30 & 0 & -15 \\ -20 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

2. Контрольная работа № 2.
«СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

2.1. Основные понятия

Определение. Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

называется системой из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1,\ x_2,\dots,x_n$.

Коэффициенты $a_{11},\ a_{12},\dots,a_{mn}$ уравнений системы можно записать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется *главной* матрицей системы.

Числа $b_1,\ b_2,\dots,b_m$, стоящие в правых частях уравнений, образуют столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных. Главная матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы и обозначается

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы (1) называется упорядоченная совокупность чисел ($\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$), при подстановке которых вместо $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ соответственно каждое уравнение системы обращается в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*. Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Определение. Система называется *определенной*, если она имеет только одно решение и *неопределенной*, если более одного.

Определение. Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется *однородной*. однородная система всегда совместна.

Теорема Кронекера – Капелли

(условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик,

Альфрéдо Капéлли (1855-1910) итальянский математик)

Теорема: *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг главной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$rgA = rg\overline{A}.$$

Замечание.

1. Если $rgA = rg\overline{A} = n$, где n – число неизвестных системы, то решение системы единственно.
2. Если $rgA = rg\overline{A} < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Метод Крамера

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод применим только для систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Правило Крамера

Пусть определитель главной матрицы системы отличен от 0

$$\Delta = \det A \neq 0;$$

Тогда система имеет единственное решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=1, \ldots, n,$$

где Δ_i – определитель, полученный из главного определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов B.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Метод Гаусса

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Для того чтобы решить систему уравнений, записывают расширенную матрицу этой системы:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

затем со строками матрицы проводят элементарные преобразования.

При элементарных преобразованиях получается система, равносильная исходной. С помощью таких преобразований приводят матрицу к ступенчатому виду. Эта часть метода Гаусса называется *прямым ходом*. Затем записывают систему линейных уравнений, соответствующую ступенчатой матрице, и, начиная с последнего уравнения системы, находят ее решение. Это *обратный ход* метода Гаусса.

Однородные системы

Пусть дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна ($rgA = rg\overline{A}$), она имеет *нулевое (тривиальное)* решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

При каких условиях однородная система имеет ненулевые решения?

Теорема. Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, т.е. $r < n$.

Пусть для системы (2) $n < r$, т.е. она имеет бесконечно много решений. Все они представляют их себя n-мерные векторы ($x_1,\ \ x_2, \dots, x_n$).

Определение. Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы называется любая максимальная линейно независимая система ее решений.

Всякое решение системы (2) можно выразить через векторы, входящие в ФСР.

Теорема. Если ранг r однородной системы (2) меньше числа неизвестных n, ФСР системы (2) состоит из ($n - r$) векторов.

Обозначим их $E_1,\ \ E_2, \dots, E_{n-r}$. Эти векторы можно получить из общего решения системы (2), если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0 (см. пример 15).

2.2. Теоретические вопросы

1. Что называется решением системы уравнений? Сколько решений может иметь система линейных уравнений?
2. Какие системы называют совместными, несовместными, определенными, неопределенными?
3. При каком условии система n уравнений с n неизвестными будет определенной?
4. Метод Крамера. Формулы Крамера.
5. Основная и расширенная матрицы системы. Теорема Кронекера-Капелли.
6. Метод Гаусса.
7. Однородная система линейных уравнений. При каком условии однородная система имеет ненулевое решение?
8. Что называется фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы? Сколько векторов содержит ФСР? Как находятся эти векторы?

2.3. Указания к решениям задач

<u>*Пример 11:*</u> Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ 9x+5y+3z=0 \\ 4x-2z=-10 \end{cases}$$

<u>*Решение:*</u> Найдем главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 90 .$$

Т. к. $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера.

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Здесь Δx – определитель, полученный из главного определителя Δ путем замены столбца коэффициентов при неизвестном x на столбец свободных членов. Δy и Δz – определяются аналогично.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -10 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -180,\ \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 9 & 0 & 3 \\ 4 & -10 & -2 \end{vmatrix} = 270,\ \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 90$$

$x=-2$, $y=3$, $z=1$.

Ответ: (-2, 3, 1)

<u>*Пример 12:*</u> Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=-1 \\ -2x+3y+z+2t=9 \\ 5x-6y+2z+3t=-17 \\ 2x-4y+4z+3t=-7 \end{cases}$$

<u>*Решение:*</u> Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольной форме путем элементарных преобразований (они указаны справа у каждой строки).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 9 \\ 5 & -6 & 2 & 3 & -17 \\ 2 & -4 & 4 & 3 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} II+I \\ III-5I \\ IV-2I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & -13 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) III+4II \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc}1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 7 & 7\\ 0 & 0 & 15 & 16\\ 0 & 0 & -2 & -5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ III\cdot 2\\ IV\cdot 15\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 7 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 30 & 28 & 32\\ 0 & 0 & -30 & 15 & -75\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ III\cdot\frac{1}{2}\\ IV+III\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 7 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 15 & 14 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 43 & -43\end{array}\right)$$

Запишем систему, соответствующую последней расширенной матрице, и найдем неизвестные.

$$\begin{cases}x-2y+3z+t=-1\\ -y+7z+4t=7\\ 15z+14t=16\\ 43t=-43\end{cases}$$

$t=-1$

$z=(16-14t):15=30:15=2$

$-y=7-7z-4t=7-14+4=-3, y=3$

$x=-1+2y-3z-t=-1+6-6+1=0$

Ответ: $(0;\ 3;\ 2;\ -1)$.

<u>Пример 13:</u> Доказать, что система совместна, и найти решение

$$\begin{cases}2x_1-5x_2+3x_3+4x_4=7\\ -3x_1+4x_2+x_3-4x_4=3\\ x_1+x_2-4x_3-3x_4=-10\end{cases}.$$

<u>Решение:</u> Основная матрица A и расширенная матрица $\overline{A}$ имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 3 & 4\\ -3 & 4 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -4 & -3\end{pmatrix},\qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -5 & 3 & 4 & 7\\ -3 & 4 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -4 & -3 & -10\end{array}\right)$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -5 & 3 & 4 & 7\\ -3 & 4 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -4 & -3 & -10\end{array}\right)\begin{array}{l}I-2III\\ II+3III\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -7 & 11 & 10 & 27\\ 0 & 7 & -11 & -10 & -27\\ 1 & 1 & -4 & -3 & -10\end{array}\right)\begin{array}{l}I+II\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 7 & -11 & -10 & -27\\ 1 & 1 & -4 & -3 & -10\end{array}\right)$$

Так как $rgA = rg\overline{A} = 2$, то система совместна и $r = 2 < n = 3$ неопределенна. Система после преобразования матрицы имеет вид:

$$\begin{cases} 7x_2 - 11x_3 - 10x_4 = -27 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -10 \end{cases}.$$

Ранг системы $r = 2$, следовательно, количество главных неизвестных будет 2, а свободных $n - r = 4 - 2 = 2$. Выберем главные неизвестные. В основной матрице системы найдем минор 2-го порядка отличный от нуля, например, $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы соответствуют неизвестным x_1 и x_2. Перепишем последнюю систему, перенося свободные неизвестные x_3 и x_4 в правую часть:

$$\begin{cases} 7x_2 = -27 + 11x_3 - 10x_4 \\ x_1 + x_2 = -10 + 4x_3 + 3x_4 \end{cases}.$$

Выражая главные неизвестные через свободные, имеем:

$$x_2 = -\frac{27}{7} + \frac{11}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_4$$

$$x_1 = -\frac{43}{7} + \frac{17}{7}x_3 + \frac{11}{7}x_4$$

Обозначим свободные неизвестные $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Общее решение системы:

$$\left(-\frac{43}{7} + \frac{17}{7}C_1 + \frac{11}{7}C_2;\ -\frac{27}{7} + \frac{11}{7}C_1 + \frac{10}{7}C_2;\ C_1;\ \ C_2\right)$$

Придавая C_1, C_2 любые значения, получим частное решение системы. Например при $C_1 = 7$, $C_2 = 0$ $\left(\frac{76}{7},\ -\frac{16}{7},\ 7,\ 0\right)$.

Пример 14: Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 9 \\ 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 16 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad\quad = 1 \end{cases}.$$

Решение: Проведем элементарные преобразования с расширенной матрицей системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & 3 & 6 & 9 \\ 7 & -5 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 5III \\ II - 7III \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 6 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & 9 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \cdot \frac{1}{2} \\ II \cdot \frac{1}{3} \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} I-II \\ \\ \\ \end{array} \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Очевидно, $rgA = 2$, $rg\overline{A} = 3$. Следовательно, система не совместна.

Пример 15: Найти фундаментальную систему решений однородной системы и ее общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение: Матрицу системы приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ II - 2\cdot I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, $rgA = 2 < 4 = n$. Следовательно, система имеет нетривиальное решение. Минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, поэтому главными неизвестными будут x_1, x_2, а x_3, x_4 - свободными.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4x_3 - 4x_4 \\ -x_2 = -3x_3 + x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -5x_3 + 2_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

Обозначим свободные неизвестные x_3 – через C_1, x_4 – через C_2.

Тогда общее решение: $\left(-5C_1 + 2C_2;\ 3C_1 - C_2;\ C_1;\ C_2\right)$. Получим фундаментальную систему решений (ФСР). Возьмем два линейно-независимых двумерных вектора $(1;0)$ и $(0;1)$. Подставляя компоненты каждого из них в общее решение в качестве C_1 и C_2 и вычисляя значения для x_1 и x_2, получим ФСР данной системы $E_1 = (-5, 3, 1, 0)$ и $E_2 = (2, -1, 0, 1)$. Тогда общее решение системы $X = C_1E_1 + C_2E_2$.

Пример 16: Сколько решений имеет система?

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решение: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I-II \\ \\ III-I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$rgA = 3$, $n = 3$. Так как ранг матрицы равен числу неизвестных, то однородная система имеет только тривиальное (нулевое) решение.

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

1. Вычислить определитель

1. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

2. С матрицами A, B, совершить указанные действия.

1. A= $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 2A+5B,

2. A= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2B-A,

3. A= $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, 3A+2B,

4. A= $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, 5A+2B,

5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}$, 3A-4B,

6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 4A-2B,

7. $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, -5A+3B,

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -7 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, -6A+3B,

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -7 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, -5A+B,

10. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 3A+2B,

11. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, -5A+6B,

12. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 7 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 5A-4B,

13. $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$, 3A+4B,

14. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 5\\ 8 & -2 & 7\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}$, -2A+3B,

15. $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 4\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\ 7 & -2 & 7\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$, 4A-7B,

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 0 & 6 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, 2A-3B,

17. $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & 8 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, -3A+5B,

18. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 6\\ 4 & 2 & 3\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -6 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, 5A+3B,

19. $A=\begin{pmatrix}9 & 0 & 1\\ 5 & -2 & 3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 8 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, -4A+5B,

20. $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 3\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 7A-8B,

21. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 6\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -4 & 2 & 2\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$, 4A+2B,

22. $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\ 7 & -2 & 7\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 4 & 7 & 8\\ 1 & 0 & -7\end{pmatrix}$, 5A-2B,

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1. Решить системы линейных уравнений: а) методом Крамера; б) методом Гаусса.

1.а) $\begin{cases} 6x - y + 4z = 19 \\ 3y + 2z = 3 \\ 3x + 8y - 2z = -11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + z - t = 10 \\ 3x - 2y + 6z + 3t = 4 \\ 4x + y + 3z + 4t = 20 \\ -2x - 3y + z + 2t = -16 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 2x + 5y - z = 19 \\ 4x + 7y + 8z = 56 \\ x - 7z = -20 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y + 5z - 3t = 14 \\ 2x + 3y - z + 3t = 10 \\ 3x + 5y - 2z + 7t = 14 \\ -x + 2y + 5z + 2t = 2 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} 5x + 4y - z = 8 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + 4z + t = 9 \\ 3x - 5y - z + 3t = -12 \\ 2x - 3y - 2z + 5t = -18 \\ -4x + 2y + z + 2t = 3 \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x + 7y - z = 14 \\ 3x + 2y + 4z = 16 \\ x + 5z = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + 6z + t = -5 \\ 2x + 2y - z + 3t = 4 \\ 3x - 3y - z + 5t = -2 \\ -2x + 2y + z + 2t = -15 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 5x + y - z = -21 \\ x + 8y + 7z = 18 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y + 4z + t = 21 \\ 2x - 3y - z + 3t = 15 \\ 3x - 2y + 2z + 5t = 33 \\ -2x + 3y + z + 2t = 10 \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} 4x + y - z = 9 \\ -3x + 5y + 2z = -17 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 15 \\ 2x - 4y + 4z + 3t = 29 \\ 3x - 2y + 2z + 5t = 33 \\ -2x + 3y + z + 2t = -3 \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} 7x + y - z = -5 \\ 3x + 5y + 4z = 16 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3z + t = -1 \\ 2x - 4y + 4z + 3t = -7 \\ 5x - 6y + 2z + 3t = -17 \\ -2x + 3y + z + 2t = 9 \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 9x-2y+4z=5 \\ 6x+3y=18 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3z+t=10 \\ 2x-4y+7z+3t=21 \\ 3x-6y+2z+3t=16 \\ -2x+3y+z+2t=-10 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} x+3y-z=6 \\ 7x-2y+3z=-17 \\ 8x+3y=-7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z+t=-8 \\ 2x-2y+5z+3t=-8 \\ 3x-5y+2z+3t=-18 \\ -2x+3y+z+2t=12 \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} 2y+5z=-8 \\ 3x-2y+2z=9 \\ 5x-3y=22 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z+t=-5 \\ 2x-2y+3z+3t=-2 \\ 4x-5y+2z+3t=-7 \\ -2x+3y+z+2t=7 \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} 5x-y-3z=-1 \\ x-2y+3z=7 \\ 9x-3y=18 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z+t=-6 \\ x-4y+3z+3t=-8 \\ -4x-5y+3z+3t=-1 \\ 2x+3y+z+2t=10 \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} 2x-y-4z=-9 \\ x+7y+3z=-7 \\ 6x+2y=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y+z-t=3 \\ x+7y+3z+t=19 \\ -4x-y+3z+3t=11 \\ -2x-3y+z+2t=0 \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} 6x-z=15 \\ x+2y+3z=-9 \\ -4x+2y+5z=-25 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+4z+t=-27 \\ 2x+y-z+3t=12 \\ 3x-3y+2z+5t=-11 \\ -2x+3y+z+2t=-8 \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} 5x-y=13 \\ x+2y+4z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y+z-t=-6 \\ 3x+7y+3z+t=-6 \\ 4x+y+3z+3t=13 \\ -2x-3y+z+2t=3 \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} 4x-y=-13 \\ -x+2y+4z=6 \\ 4x+2y+7z=-8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+z-t=-6 \\ 3x-2y+3z+6t=-24 \\ 6x+y+3z+4t=-30 \\ -2x-3y+z+2t=0 \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ -3x + 3y - z = -9 \\ 3x - 5y - z = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4y - 3z + 2t = -8 \\ -x + 2y + z - t = 4 \\ x + y + 5z - 3t = 4 \\ -4x - y - 3z - t = 7 \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} 7x - y + 4x = 11 \\ x + 2y + 2z = 13 \\ 3x + 8y - 2z = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + z - t = -3 \\ 3x + 7y + 4z + 3t = -4 \\ 4x + 9y + 3z + 4t = -9 \\ -2x - 3y + z + 2t = 9 \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} x - y + 6z = 7 \\ 4x + 2y + 3z = -8 \\ 3x + 5y - 2z = -11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + z - t = -3 \\ 2x + 5y + 4z + 3t = 0 \\ 5x + 9y + 3z + 4t = -7 \\ 3x + 4y + z + 2t = -2 \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} 9x + z = 6 \\ 5x - 2y + 3z = -8 \\ 3x + y - 2z = 11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + z - t = -6 \\ 3x + 5y + 4z + 3t = -9 \\ -5z - 9y + 3z - 8t = 14 \\ 2x + 4y + z + 2t = -8 \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} x + 8y + 3z = 0 \\ 2x + 5y = -1 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + z - t = -4 \\ 3x + 5y + 4z + 3t = -4 \\ 4x + 6y + 3z - 8t = -16 \\ 2x + 4y + z + 2t = -4 \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} x + 4y + 2z = 4 \\ -3x - y + 4z = 7 \\ 5x + y + 2z = 15 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + z + 2t = -1 \\ -3x + 2y + t = -6 \\ -2x + y + z + 3t = -6 \\ x + 4y + z + 4t = 1 \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ -x + 5y + 2z = 17 \\ 6x + y + z = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 2y + z - 3t = 10 \\ 2x + y + 4t = 19 \\ 3x + y + z - 2t = 6 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} x - 2y + 5z = 4 \\ 4x - 7y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - z - 3t = 8 \\ x + 3y + 2z - 4t = 24 \\ 3x + 4y + z + 5t = -16 \\ 3x + 4y - z + 7t = -30 \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 7 \\ 5x + y + 2z = 5 \\ -2x - y + z = 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + 5z + 2t = 3 \\ 3x + 2y + z + t = 1 \\ 5x + 3y + 2z + 4t = 5 \\ 2x + y + 3z + 3t = 4 \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} x + 4y - 2z = 2 \\ 3x + 2y - z = 11 \\ 4x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y + 4z + 3t = -10 \\ 3x - 2y + z - t = -3 \\ 4x - 3y - 2z + t = 1 \\ -2x + 2y + z + 2t = 2 \end{cases}$