Алгебраические структуры

# Бинарные операции и их свойства

 Есть две новые операции, специфические. Они называются – операциями навешивания кванторов. Эти операции соответствуют фразам «для всех» – квантор общности и «некоторые» – квантор существования. Следует немного сказать о значках, которые при этом используются, в силу их экзотичности. Квантор общности произошёл от английского «All» и обозначается буквой A, перевернутой вверх ногами (). Квантор существования произошёл от английского Exist и обозначается буквой E, которую вверх ногами переворачивать бесполезно, поэтому её повернули кругом ().

Пусть предикат, определённый на множестве. Высказывание «для всехистинно» обозначаетсяили. Здесь множествовходит в обозначение, но когда оно ясно из контекста пишут просто.

Высказывание «существует такое значение , чтоистинно» обозначаетсяили. Переход от предикатак выражениям видаилиназывается **связыванием** переменной, а также **навешиванием квантора** на переменную(или на предикат). Переменная, на которую навешен квантор, называется **связанной**, несвязанная переменная называется **свободной**.

Смысл связанных и свободных переменных в предикатах принципиально различен. Свободная переменная – это обычная переменная, которая может принимать различные значения из множества ; выражение– переменное высказывание, зависящее от значения. Выражениене зависит от переменнойи имеет вполне определённое значение. Это, в частности, означает, что переименование связанной переменной, то есть переход от выраженияк выражениюи наоборот не меняет истинности выражения. Переменные, являющиеся, по существу, связанными, встречаются не только в логике.

Часто в математике нам приходится комбинировать элементы некоторого множества. Так в арифметике комбинируются числа, в векторной алгебре – векторы.

Существенной особенностью каждого из этих примеров является правило, по которому устанавливается соответствие для элементов определённых множеств. Целью данного раздела является рассмотрение ситуации, когда любым двум элементам множества ставится в соответствие элемент того же множествапо определённому правилу. Такое соответствие назовём «бинарной операцией».

***Определение:* Бинарная операция**на непустом множестве– это правило, которое ставит в соответствие любой упорядоченной пареединственный элемент.

***Пример 1.1:***Арифметическое сложение на множестве целых положительных чисел является бинарной операцией, а разность – не является, т.к. для любыхиразность – не всегда положительное число.

Для некоторых бинарных операций порядок следования операндов несущественен, для других – важен.

***Пример 1.2:***в произведении порядок элементов роли не играет т.к., а для частного – играет. Равенство следует перечеркнуть –оно неверно.

Следовательно, бинарная операция должна рассматриваться как действие над упорядоченной парой элементов.

***Замечание:*** Если прочесть определение повнимательнее, то можно увидеть, что бинарная операция вполне может рассматриваться как функция, которая задаёт элементдля каждой упорядоченной пары элементов.

***Определение:*** Условиеявляется свойством замкнутости бинарной операции. Когда такое условие выполняется будем говорить, что**замкнуто** относительно операции.

***Пример 1.3:*** Операции сложения, умножения, вычитания являются бинарными операциями на множестве целых чисел. Деление не является бинарной операцией на, т.к. при делении одного целого числа на другое не всегда получается целое число. Т.е.– не является замкнутым множеством относительно операции деления.

***Пример 1.4:***Операции сложения, умножения, вычитания являются бинарными операциями на множестве рациональных чисел. Деление не является бинарной операцией на, т.кне определено для всех.

***Пример 1.5:*** Если– множество всех подмножеств некоторого множества, то операции пересечения, объединения являются бинарными операциями.

Дадим определения, которые позволят нам говорить о некоторых свойствах операций.

***Определение:*** Бинарная операция, заданная на непустом множественазывается **коммутативной**, если

***Пример 1.7:***Операции сложения, умножения на множестве рациональных чиселявляются коммутативными. Вычитание не является коммутативной операцией.

***Пример 1.8:***Операции конъюнкции, дизъюнкции на множестве высказываний являются коммутативным, импликация не является коммутативной.

***Определение:*** Операция, заданная на непустом множественазывается **ассоциативной**, если.

***Пример 1.9:*** Операции сложения, умножения на множестве рациональных чиселявляются ассоциативными.

***Определение:*** Пусть– бинарная операция, заданная на непустом множестве. Элемент, такой чтоназывается **элементом идентичности** для операциина множестве.

***Замечание:*** Обратите внимание, что для того чтобы элементявлялся элементом идентичности свойство должно выполняться для **всех** элементов множества.

***Пример 1.10:*** Элементом идентичности для операции сложения на множестве рациональных чиселявляется элемент 0. Но при этом 0 не является элементом идентичности для операции вычитания, т.к– верно, но.

***Определение:*** Пусть– бинарная операция, заданная на непустом множестве. И существует– элемент идентичности для операции. Элементназывается **обратным** дляесли.

Обратный элемент обычно обозначают . При этом если– обратный элемент для, то– обратный элемент для.

***Пример 1.11:*** Обратным элементом для операции сложения на множестве рациональных чиселдляявляется число.

***Теорема:****Пусть**– бинарная операция, заданная на непустом множестве**. Если элемент идентичности существует, то он единственный.*

*Доказательство:* Пусть ,– элементы идентичности на множестведля операции. Т.к.- элемент идентичности, то следовательно и для:



аналогичны рассуждения и для элемента идентичности . Следовательно. Что и требовалось показать.

***Теорема:*** *Пусть**– ассоциативная бинарная операция с элементом идентичности, заданная на непустом множестве**. Для любого элемента, который имеет обратный элемент, обратный элемент единственный.*

# Подмножество, понятие универсального множества

***Определение:*** Множествоявляется **подмножеством**, если любой элемент множествапринадлежит множеству. Это ещё называется **нестрогим включением**.

Некоторые свойства подмножества:

– рефлективность;

– транзитивность;

т.е. пустое множество является подмножеством любого множества.

***Пример 2.6:*** пусть****– множество студентов некоторой группы,****– множество отличников этой же группы.****т.к. группа может состоять только из отличников.

Когда хотят подчеркнуть, что в множестве ****есть обязательно элементы, отличные от элементов множества****, то пишут****. Это называется **строгим включением**.

***Пример 2.7:***пусть****– множество всех студентов университета,****– множество студентов физико-технического института.****т.к. в множестве всех студентов университета, обязательно есть элементы не принадлежащие****.

***Определение:* Универсальное множество**– это такое множество, которое строго включает в себя любое из рассматриваемых множеств, т.е..

Универсальное множество обычно обозначается ****.

Универсальное множество может выбираться самостоятельно, в зависимости от рассматриваемых множеств, и решаемых задач.

***Пример 2.8:***рассматривая множество студентов отдельной группы, в качестве универсального множества можно взять и множество студентов университета, и множество всех людей земли, и множество всех живых существ земли.

Рассматривая множество целых положительных чисел, в качестве универсального множества можно взять и множество целых чисел, и множество действительных чисел, и множество комплексных чисел.

Более подробно о свойствах универсального множества мы поговорим, обсуждая операции над множествами. Скажем только, что если роль нуля в алгебре множеств играет пустое множество. То универсальное множество, играет роль единицы в алгебре множеств.

Семейство всех подмножеств множества называется булеаном множестваи обозначается.

***Пример 2.9:***



## Тема 2.3. Операции над множествами

Теперь определим операции над множествами.

***Определение:*Пересечением** множествиназывается множество, состоящее из всех тех, и только тех элементов, которые принадлежат и множествуи множеству.

***Пример 2.10:***

ипересечением



***Определение:***Множества называются **непересекающимися**, если не имеют общих элементов, т.е. их пересечение равно пустому множеству.

***Пример 2.11:*** непересекающимися множествами являются множества отличников группы и неуспевающих.

Данную операцию можно распространить и на большее чем два число множеств. В этом случае это будет множество элементов, принадлежащих одновременно всем множествам.

Свойства пересечения:

– коммутативности;

– ассоциативности;

– идемподентности;

;

;

;

, тогда и только тогда, когда.

***Определение:*Объединением** двух множеств****называется множество, состоящее из всех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств****или****.

***Пример 2.12:***

и****объединением****.



Данную операцию можно распространить и на большее чем два число множеств. В этом случае это будет множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

Свойства объединения:

– коммутативности;

– ассоциативности;

– идемподентности;

– принцип расширения;

Если , то;

; ???

.

Из свойств операций пересечения и объединения видно, что пустое множество аналогично нулю в алгебре чисел.

***Теорема:***1) ,

2) .

*Доказательство:*

1) , следовательно или , в этом случае или и , в обоих случаях по принципу расширения и , тогда .

Таким образом доказано, что .

Аналогично доказывается включение . Из этих двух включений и следует доказываемое равенство (дистрибутивность объединения множеств относительно пересечения слева).

Второе утверждение теоремы (дистрибутивность пересечения относительно объединения) доказывается аналогично.

***Определение:*Разностью** множеств****и****называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат****и не принадлежат****.

***Пример 2.13:***

разность****



Свойства разности множеств:

;

;

Если , то;

.

***Теорема:***

1. ;

2. ;

3. – дистрибутивность разности множеств относительно объединения справа;

4. – дистрибутивность разности множеств относительно пересечения справа.

Дополнением множества называется разностьи.



Свойства дополнения:

;

;

;

;

.

***Определение*: Симметричной разностью** множеств****и****называется множество, состоящее их всех тех и только тех элементов, которые принадлежат****и не принадлежати элементов, которые принадлежат****и не принадлежат****.



***Пример 2.14:*  **симметричная разность****



Свойства симметричной разности:

;

;

;

;

;

если, тои.

# Типы отношений

Теперь опишем несколько часто употребляемых типов отношений.

Часто приходится сталкиваться с отношениями, определяющими некоторый порядок расположения элементов множества.

***Пример 6.6:*** отношения строгого порядка:

* отношения «быть больше», «быть меньше» на множестве действительных чисел;
* отношение строгого включения на множестве подмножеств данного множества;
* отношение «быть предком» на множестве людей.

***Определение:* Отношение строгого порядка**– это антирефлексивное, несимметричное и транзитивное отношение на множестве****.

***Пример 6.7:***отношения нестрогого порядка:

* отношение **** на множестве действительных чисел;
* отношение ****на множестве подмножеств данного множества.

***Определение:* Отношение нестрогого порядка**– это рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение на множестве. ???

Некоторые элементы множества можно рассматривать как эквивалентные, если любой из этих элементов при некотором рассмотрении можно заменить другим.

***Пример 6.8:***отношения эквивалентности могут быть:

* отношение «быть синонимом» на множестве слов русского языка;
* отношение «иметь одинаковый остаток при делении на 3» на множестве целых чисел;
* отношение «быть параллельной» на множестве прямых одной плоскости;
* отношение «быть братом» на множестве людей.

***Определение:* Отношение эквивалентности** – это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве Х.

Т.е отношение эквивалентности удовлетворяет следующим условиям: каждый элемент эквивалентен сам себе, не важен порядок, в котором рассматриваются эквивалентные элементы, и если два элемента эквивалентны третьему, то они эквивалентны между собой.

***Определение:*** Функцияназывается **двойственной** к функции, если.

Если взять отрицание обеих частей равенства и подставить вместо переменных, то получится искомое равенство. Это означает, что функциядвойственна к функции, и, таким образом, отношение двойственности является симметричным. Из определения двойственности ясно, что для любой функции двойственная ей функция определяется однозначно. В частности, может оказаться, что функция двойственна самой себе. В этом случае она называется **самодвойственной**.

***Пример 8.5:*** Если рассматривать логические функции, то, очевидно, дизъюнкция двойственна конъюнкции и наоборот (непосредственно следует из законов Де Моргана). Отрицание является самодвойственной функцией. Функция-константадвойственна функции. Ещё один традиционный пример самодвойственной функции – функция.

Пользуясь определением двойственности нетрудно доказать следующее утверждение, называемое принципом двойственности.

***Теорема:****Если в формуле**, представляющей функцию**, все знаки функций заменить соответственно на знаки двойственных им функций, то полученная формула**будет представлять функцию**, двойственную функции**.*

В булевой алгебре принцип двойственности имеет более конкретный вид, вытекающий из ранее приведённых примеров: если в формуле , представляющей функцию, все конъюнкции заменить дизъюнкциями и наоборот, все единицы заменить нулями и наоборот, то получим формулу, представляющую функцию, двойственную функции.

Если функции равны, то двойственные им функции также равны. Это позволяет с помощью принципа двойственности получать новые эквивалентные соотношения.

***Определение:*** Алгебра над множеством логических функций с двумя бинарными операцияминазывается **алгеброй Жегалкина**.

В алгебре Жегалкина выполняются следующие соотношения:

;

;

;

.

Кроме того, выполняются соотношения, ранее сформулированные булевой алгебры, относящиеся к конъюнкции и константам. Отрицание и дизъюнкция выражаются так:

;

;

.

Если в произвольной формуле алгебры Жегалкина раскрыть скобки и произвести все упрощения по вышеуказанным соотношениям, то получится формула, имеющая вид суммы произведений, то есть полином (многочлен) по модулю 2. Такая формула называется **полиномом Жегалкина** для данной функции.

От булевой формулы всегда можно перейти к формуле алгебры Жегалкина.

***Пример 9.2:*** Составить полиномы Жегалкина для данных функций:

а) ,

б) .

Заметим, что если в полученных полиномах Жегалкина произвести обратную замену функций, то получим упрощённые формулы булевой алгебры.

Рассмотрим пример решения логической задачи.

***Пример 11.2:***

После обсуждения состава участников экспедиции решено, что должны выполняться два условия:

* если поедет Арбузов, то должны ехать Брюквин или Вишневский;
* если поедут Арбузов и Вишневский то поедет Брюквин.

Составить логическую формулу принятия решения в символической форме, упростить полученную формулу и сформулировать по ней новое условие формирования экспедиции.

Введём переменные и соответствующие им элементарные высказывания.

- поедет Арбузов;

- поедет Брюквин;

- поедет Вишневский.

Тогда выработанные условия формирования экспедиции будут выглядеть следующим образом:

* 
* 

Составим общую формулу и упростим выражение



т.е. если поедет Арбузов, то поедет Вишневский.

***Пример 11.3:***

Если завтра будет хорошая погода, то мы пойдем на пляж или поедем в лес. Составим формулу нашего поведения на завтра.

– хорошая погода

– мы пойдем на пляж

– мы поедем в лес



Теперь построим отрицание этой фразы



т.о. получим высказывание «Завтра будет хорошая погода, и мы не пойдем в лес и на пляж».

Желающие могут построить таблицу истинности и проверить это утверждение.

***Пример 11.4:***

По подозрению в совершенном преступлении, задержаны Браун, Джон и Смит. Один из них уважаемый в городе старик, второй чиновник, а третий известный мошенник. В ходе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом лгал.

Вот что они говорили:

Браун: «Я совершил это. Джон не виноват»

Джон: «Браун не виноват. Преступник Смит»

Смит: «Я не виноват. Виноват Браун»

Опишем эти высказывания формально:

- преступление совершил Браун;

- преступление совершил Джон;

- преступление совершил Смит.

Тогда их слова описываются следующими выражениями:

Браун: 

Джон: 

Смит: 

Т.к. по условиям задачи две из этих & ложны и одна истинна, то



Составим таблицу истинности

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| NN | https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-pFfPsT.png | https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-KXtQIK.png | https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-hj023T.png | https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-btkurN.png | https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-511VFk.png | https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-_1ACw7.png | https://studfile.net/html/2706/13/html_wTscj5iPAi.w23R/img-MZGAOA.png |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Исключим из рассмотрения те наборы, на которых (по условию задачи одна из & - истинна, следовательно,) 1, 3, 8

Исключим случай 5, т.к. в нем две & истинны, что противоречит условию задачи.

В случаях 4, 6, 7 у нас в начальном наборе две 1 , т.е. 2 преступника, а по условию задачи он один.

Остаётся только случай 2 , т.е. преступник Смит, и оба его высказывания ложны.

следовательно– ложно и- истинно

– Джон уважаемый старик

Остаётся, что Браун чиновник, и поскольку – ложно , то– истинно.

Пользуясь законами и тождествами булевой алгебры можно упрощать логические выражения.

***Пример 11.5:***



***Упражнение***:



ЗАДАНИЕ. Является ли полной система булевых функций, состоящая из дизъюнкции и импликации? РЕШЕНИЕ: Воспользуемся Теоремой Поста (о полноте). Для того чтобы система булевых функций была полна необходимо и достаточно, чтобы она содержала функцию, не сохраняющую 0, функцию, не сохраняющую 1, несамодвойственную функцию, немонотонную функцию, нелинейную функцию. Составим таблицу истинности для данных функций f1 = x1 V x2, f2 = x1 → x2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х1 | Х2 | f1 | f2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Будем последовательно проверять все условия теоремы. 1) Функция f2 не сохраняет нуль, так как f2(0,0)=1. 2) Функции f1 и f2 сохраняют единицу, так как f1(1,1) =f2(1,1)=1; следовательно, система функций неполна. Ответ: Система булевых функций, состоящая из дизъюнкции и импликации, неполна.

ЗАДАНИЕ. Доказать полноту (или неполноту) приведенной системы булевых функций f1 = x1 ∧ x2 , f2 = 0, f3 = x ~ x

 РЕШЕНИЕ. Воспользуемся Теоремой Поста (о полноте). Для того чтобы система булевых функций была полна необходимо и достаточно, чтобы она содержала функцию, не сохраняющую 0, функцию, не сохраняющую 1, несамодвойственную функцию, немонотонную функцию, нелинейную функцию. Составим таблицу истинности функций.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х1 | Х2 | f1 | f2 | f3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Функция f3 не сохраняет 0 (так как f3 (0,0)= 1)

 Функция f2 не сохраняет 1 (так как f2 (1,1)= 0 )

Функция f1 несамодвойственна (так как 0 = f1 (0,1) ≠ ¬ f1 (1,0) = 1)

Функция f3 немонотонна (так как для упорядоченных наборов (0,0)≺ (0,1) она принимает значения f3 (0,0)= 1$>0=f\_{3}\left(0,1\right)$

 Функция f1 нелинейна. Покажем это.

 f1 (0,0) = a0 ⊕ 0 ⊕ 0 = 0 ⇒ a0 = 0

f1(0,1) =0 ⊕0 ⊕ a2 =0 ⇒ a2 =0

f1(1,0) =0 ⊕a1 ⊕0=0→ a1 =0 ⇒ f ≡ 0 , что неверно.

Таким образом, по теореме Поста система {f 1 , f 2 , f 3 } полна, так как включает в себя функцию, не сохраняющую 0, функцию, не сохраняющую 1, несамодвойственную функцию, нелинейную функцию, немонотонную функцию.

Задания для самостоятельного решения:

1. Корни многочлена P(x)= (x-1)(x+2.2)(x-0.2) принадлежат множеству:

A=$\left\{x \in R /0.2\leq x\leq 1\right\}$

A=$\left\{x\in R /-2.2\leq x<1\right\}$

A=$\left\{x\in R /-2.2\leq x\leq 2\right\}$

A=$\left\{x\in R /-2.2\leq x\leq 0.5\right\}$

1. Бинарная операция R делимости aRb (а делит в) выполнима и однозначна на множестве пар (а, в) $\in N×N:$

1 $\left\{\left(18;3\right),\left(18;9\right),\left(18;36\right),\left(18,18\right)\right\}$

2 $\left\{\left(48;3\right),\left(48;4\right),\left(48;6\right),\left(48,8\right)\right\}$

3 $\left\{\left(36;2\right),\left(36;3\right),\left(36;4\right),\left(36,9\right)\right\}$

4 $\left\{\left(16;2\right),\left(16;4\right),\left(16;32\right),\left(16,16\right)\right\}$

1. На множестве А= {3; 5; 7; 9; 11} из множества N задано отношение х > y. Выпишите все пары элементов, находящихся в этом отношении.
2. Класс выставил на соревнования по плаванию команду мальчиков. В нее вошли Витя, Коля, Андрей, Саша. Коля проплыл дистанцию быстрее Андрея, но медленнее Саши, Андрей затратил на ту же дистанцию времени больше, чем Витя, который плавал медленнее Коли. Как распределились места на соревнованиях? (Задачу решить с помощью построения графа соответствующего бинарного отношения.)
3. М – множество озер Канады. На М задано бинарное отношение «иметь одинаковый объем воды» Будет ли это отношение эквивалентностью.
4. Какое отношение называют рефлексивным?
5. Какое отношение называют симметричным?
6. Какое отношение называют транзитивным?
7. Каким из этих свойств обладает отношение «быть параллельным»?
8. Придумать свой пример.