**Замена переменной под знаком интеграла**

Во многих случаях подынтегральное выражение не позволяет сразу же найти интеграл по таблице. Тогда введение новой переменной интегрирования помогает свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой метод называется ***методом подстановки*** или ***методом замены переменной***.

Вводится новая переменная, назовём её *t*. Например,

* в интеграле https://function-x.ru/chapter8-1/int042.gif можем ввести новую переменную https://function-x.ru/chapter8-1/int127.gif;
* в интеграле https://function-x.ru/chapter8-1/int001.gif можем ввести новую переменную https://function-x.ru/chapter8-1/int128.gif;
* в интеграле https://function-x.ru/chapter8-1/int028.gif можем ввести новую переменную https://function-x.ru/chapter8-1/int029.gif.

Далее *dx* определеяем как дифференциал по переменной *t*. После этого интеграл можно найти по таблице интегралов. Заменив обратно *t* на функцию от *x*, находим данный интеграл окончательно.

Метод подстановки (замены переменной). Общих методов подбора подстановок не существует. Метод заключается во введении новой переменной интегрирования.



**Задание.** Вычислить неопределенный интеграл https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1953.png

**Решение.** Распишем подынтегральную функцию, используя тригонометрические функции (определение котангенса)

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1954.png

Внесем https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1955.png под знак дифференциала:

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1956.png

Полученный интеграл можно вычислить, используя табличный интеграл

В результате получим

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1957.png

**Ответ.** https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1958.png

Или

**Задание.** Вычислить неопределенный интеграл https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1953.png

**Решение.** Распишем подынтегральную сумму, используя тригонометрические функции (определение котангенса)

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_1954.png

Ведем подстановку:



**Задание.** Найти неопределенный интеграл https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_2010.png

**Решение.** Введем замену https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_2011.png и полученный интеграл находим как интеграл от степенной функции:

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_2012.png ???

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_2013.png

Сделаем обратную замену

https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_2014.png

**Ответ.** https://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/integral/primeri_2015.png

**Формула**

**Формула**

**Формула**



**Формула**

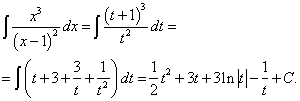
Формула

**Смешанные интегралы**

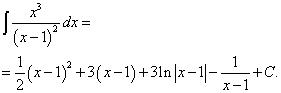
**Пример 1.** Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:

https://function-x.ru/chapter8-1/integral1_clip_image094.gif

Решение. Производим замену x − 1 = t; тогда x = t + 1. Отсюда dx = dt. По формуле (1)



Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем



**Пример 2.** Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:

https://function-x.ru/chapter8-1/int042.gif.

Решение. Положим https://function-x.ru/chapter8-1/int043.gif. Отсюда  
.  
По формуле (1)

https://function-x.ru/chapter8-1/int045.gif.

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

https://function-x.ru/chapter8-1/int046.gif

1=Ax2 + 3A + Bx2 – Bx + Cx – C = x2(A + B) + x(-B + C) + (3A – C)

Складываем все три уравнения 4А=1, значит А= ¼, В= -1/4, С= -1/4.

Самостоятельно

**Пример 1.** Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:

https://function-x.ru/chapter8-1/int109.gif.

**Пример 2.** Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:

https://function-x.ru/chapter8-1/int113.gif.

**Пример 3.** Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:

https://function-x.ru/chapter8-1/int117.gif.

7.

8.

9.

10.

11.

12.