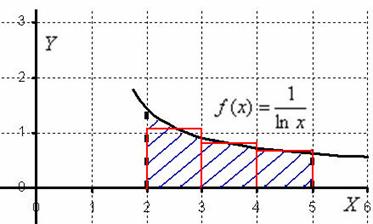
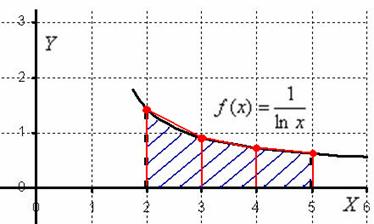
**Методы приближенного вычисления определенного интеграла**

Одной из распространенных задач является – приближенное вычисление [**определенных интегралов**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html). Методами приближенного вычисления определенного интеграла являются:  **метод прямоугольников, метод трапеций** и **метод Симпсона (метод парабол)**.

Что нужно знать, чтобы освоить данные методы? Можно вообще не уметь брать интегралы. Из технических средств потребуется микрокалькулятор.

**Метод прямоугольников**. Отрезок интегрирования разбивается на несколько частей и строится ступенчатая фигура, которая по площади близка к искомой площади:  


Очевидно, что чем чаще разбиение (больше мелких промежуточных отрезков), тем выше точность. **Метод трапеций**. Идея аналогична. Отрезок интегрирования разбивается на несколько промежуточных отрезков, и график подынтегральной функции приближается ломаной линией:  


Таким образом, наша площадь приближается суммой площадей трапеций (красный цвет). Отсюда и название метода. Легко заметить, что метод трапеций даёт значительно лучшее приближение, чем метод прямоугольников (при одинаковом количестве отрезков разбиения). И, естественно, чем больше более мелких промежуточных отрезков мы рассмотрим, тем будет выше точность. Метод трапеций время от времени

**Метод Симпсона (метод парабол)**. Это более совершенный способ – график подынтегральной функции приближается не ломаной линией, а маленькими параболами. Сколько промежуточных отрезков – столько и маленьких парабол. Если взять те же три отрезка, то метод Симпсона даст ещё более точное приближение, чем метод прямоугольников или метод трапеций.

**Как вычислить определенный интеграл методом трапеций?**

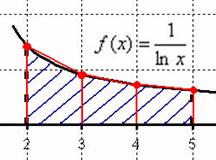
Сначала формула в общем виде. Рассмотрим определенный интеграл http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image017.gif, где http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image019.gif – функция, непрерывная на отрезке http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image021.gif.  Проведём разбиение отрезка http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image021_0000.gif на http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image023.gif **равных** отрезков:  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image025.gif. При этом, очевидно: http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image027.gif (нижний предел интегрирования) и http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image029.gif (верхний предел интегрирования). Точки http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image031.gif также называют **узлами**.

Тогда определенный интеграл можно вычислить приближенно **по формуле трапеций**:  
Общая формула трапеций, где:  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image035.gif – длина каждого из маленьких отрезков или **шаг**;  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image037.gif – значения подынтегральной функции в точках http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image031_0000.gif.

Пример 1

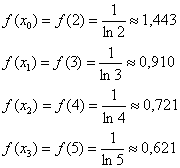
Вычислить приближенно определенный интеграл по формуле трапеций. Результаты округлить до трёх знаков после запятой.  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image039.gif

а) Разбив отрезок интегрирования на 3 части.  
б) Разбив отрезок интегрирования на 5 частей.

**Решение:**  
  
  
По условию отрезок интегрирования нужно разделить на 3 части, то есть http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image042.gif.  
Вычислим длину каждого отрезка разбиения: http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image044.gif. Параметр http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image046.gif, напоминаю, также называют **шагом**.

Сколько будет точек http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image048.gif (узлов разбиения)? Их будет **на одну больше**, чем количество отрезков:  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image050.gif

Ну а общая формула трапеций сокращается до приятных размеров:  
Формула трапеции для трех отрезков разбиения n=3

Для расчетов можно использовать обычный микрокалькулятор:  


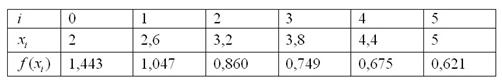
Обратите внимание, что, **в соответствии с условием задачи, все вычисления следует округлять до 3-го знака после запятой**.

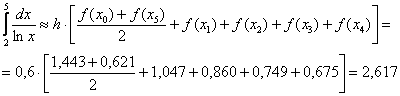
Окончательно:  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image056.gif

С геометрической точки зрения мы вычислили сумму площадей трёх трапеций.

б) Разобьём отрезок интегрирования на 5 равных частей, то есть http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image058.gif. Если http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image058_0000.gif, то формула трапеций принимает следующий вид:  
Формула трапеций для пяти отрезков разбиения n=5

Найдем шаг разбиения:  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image062.gif, то есть, длина каждого промежуточного отрезка равна 0,6.

При чистовом оформлении задачи все вычисления удобно оформлять расчетной таблицей:  


В результате:  


Ну что же, уточнение, и серьёзное, действительно есть! Если для 3 отрезков разбиения приближённое значение составило http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image076.gif, то для 5 отрезков http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image078.gif. Таким образом, с большой долей уверенности можно утверждать, что, по крайне мере http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image080.gif.

Рассмотрим определенный интеграл http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image017_0000.gif, где http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image019_0000.gif – функция, непрерывная на отрезке http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image021_0001.gif.  Проведём разбиение отрезка http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image021_0002.gif на **чётное** количество **равных** отрезков. Чётное количество отрезков обозначают через http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image120.gif.

На практике отрезков может быть:  
**два**: http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image122.gif  
**четыре**: http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image124.gif  
**восемь**: http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image126.gif  
**десять**: http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image128.gif  
**двадцать**: http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image130.gif

**Внимание!**Числоhttp://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image132.gif понимается как ЕДИНОЕ ЧИСЛО. То есть, **НЕЛЬЗЯ** сокращать, например, http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image126_0000.gif на два, получая http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image118_0000.gif. Запись http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image120_0000.gif **лишь** **обозначает**, что количество отрезков **чётно**. И ни о каких сокращениях речи не идёт

Итак, наше разбиение имеет следующий вид:  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image135.gif

Термины аналогичны терминам метода трапеций:  
Точки http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image137.gif называют **узлами**.

**Формула Симпсона** для приближенного вычисления определенного интеграла имеет следующий вид:  
Общая формула Симпсона, где:  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image141.gif – длина каждого из маленьких отрезков или **шаг**;  
http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image037_0001.gif – значения подынтегральной функции в точках http://mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image137_0000.gif.

Пример: вычислить всеми методами интеграл:

n=10, y==0.2

X0=0 y0=1.00000

X1=0.2 y1=0.96154

X2=0.4 y2=0.86207

X3=0.6 y3=0.73529

X4=0.8 y4=0.60976

X5=1.0 y5=0.50000

X6=1.2 y6=0.40984

X7=1.4 y7=0.33784

X8=1.6 y8=0.28090

X9=1.8 y9=0.23585

X10= 2.0 y10=0.20000

I1===1.18662 **I1=1.187-**формула (1) прямоугольников

I2===1.02662 **I2=1.027-** формула (2) прямоугольников

I3===1.10662 **I3=1.107-** формула трапеций

I4====1.10715 **I1=1.107-** формула Симпсона

I5== =arctg2 - arctg0= 1.107149 **I5=1.107 –** непосредственное интегрирование с помощью таблиц интегралов.

Вычислить приближенно с точностью до 0,01, разбив отрезок интегрирования на 10 частей:

f(x)=

X0=0 y0=2.23608

X1=1 y1=2.44949

X2=2 y2=3.60555

X3=3 y3=5.65685

X4=4 y4=8.30662

X5=5 y5=11.40175

X6=6 y6=14.86607

X7=7 y7=18.65476

X8=8 y8=22.73763

X9=9 y9=27.09243

X10= 10 y10=31.70173

I= = = (2.23608+2.44949+3.60555+5.65685+8.30662+11.40175+14.86607+18.65476+22.73763+27.09243)=117.00723 **I1=117.01**

I= = = (2.44949+3.60555+5.65685+8.30662+11.40175+14.86607+18.65476+22.73763+27.09243+31.70173)=146.47288 **I2=146.47**

I3= = = **I3=131.74**

I4===(2.23608+31.70173+2()+4())=

131.33022 **I4=131.33**

**Самостоятельно:** Вычислить приближенно с точностью до 0,001, разбив отрезок интегрирования на 10 частей:

f(x)=