1. **Исторические сведения**

Понятие числа имеет свою многовековую историю. Число, как и все научные понятия, возникло в результате практических нужд человека. Понятие о числе возникло в доисторические времена в связи с необходимостью счета различных предметов. Поэтому первоначально рассматривались лишь целые положительные числа, которые называют *натуральными* и обозначают буквой N. В этом множестве всегда возможны операции сложения и умножения.

Потребность более точных измерений таких величин, как площадь, вес, время привели к дроблению основной единицы меры на мелкие части, так появились дробные числа. Целое число – частный случай дроби. Целые и дробные числа образуют класс *рациональных* чисел – Q.

Задачи измерения непрерывных величин привели к введению чисел иррациональных . Исторически «открытие» иррациональных чисел приписывается Пифагору, который обнаружил несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной.

Позже начали появляться отрицательные числа. Систематическое применение отрицательных чисел в общих формулах и их использование в качестве коэффициентов алгебраических уравнений одновременно с введением нуля впервые встречается у индусов (VI – XI век). Индусам же принадлежит и правильное толкование отрицательных чисел и действий с ними на примерах простейших направленных величин, таких как прибыль-убыток, перемещение в противоположных направлениях и т.п. В XVI веке Декарт дал геометрическое истолкование отрицательных чисел как направленных отрезков.

Числа рациональные и иррациональные, положительные и отрицательные получили общее название *действительных* или вещественных чисел R. Геометрически действительные числа изображаются точками числовой оси – прямой, на которой указано положительное направление, начальная точка и масштаб.

Исторически понятие комплексного числа появилось как расширение понятия действительного числа в связи с решением алгебраических уравнений. В общем случае на множестве R некоторые алгебраические уравнения не имеют корней, в то время как в пространстве комплексных чисел любое алгебраическое уравнение n-ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Первое упоминание о мнимых числах как о корнях квадратных из отрицательных чисел относится еще к XVI веку. В 1545 г. итальянский ученый Кардано (1501-1576) опубликовал работу, в которой, пытаясь решить уравнение x3 – 12x + 16 = 0, он пришел к выражению. Через это выражение представлялись действительные корни x1 = x2=2 и x3 = -4. Таким образом, в работе Кардано мнимые числа появились как промежуточные члены в вычислении.

С середины XVIII века Даламбер, Эйлер и Лагранж с успехом используют функции комплексного переменного для решения некоторых задач гидродинамики. С помощью функций комплексного переменного решаются задачи о составлении географических карт, ряда чисто математических задач. Правила сложения и вычитания комплексных чисел совпадают с соответствующими правилами для векторов.

Векторная интерпретация широко используется для изображения гармонических колебаний, переменных синусоидальных токов и напряжений. Комплексные числа нашли широкое применение в электроэнергетических расчетах, в частности, при анализе режимов работы электрических систем. Теория функций комплексного переменного является одной из основных в прикладной математике.

**Решение квадратного уравнения ах2 + вх + с = 0**

**D = b2 – 4ac;** $x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}$ **; 1) D > 0 →** $x\_{1}\ne x\_{2};$

 **2) D = 0 →** $x\_{1}=x\_{2}$**;**

 **3) D < 0 → ?**

1. **Определение комплексного числа.**

 **Действия над комплексными числами**

Многие задачи прикладного характера сводятся к решению квадратных уравнений, которые на множестве действительных чисел не всегда решаются, поэтому и появилась необходимость нового понятия: √-1 = i – *мнимая единица*. Символ i от слова imaginarius (мнимый) ввел Эйлер (1777 г). И тогда решение уравнения

x2 + 9 = 0, x2 = -9, , x = ± 3 i

Так как : √-1 = i, то i2 = -1; i3 = - i; i4 = 1. $i^{100}=\left(i^{4}\right)^{25}=1$

Число *z = a + bi (a,b € R)* называют *комплексным числом*.

*a = Re z* – действительная часть числа z,

*b = Im z* - мнимая часть числа z.

При *а = 0* число *z = bi* – мнимое число; при *b = 0* число *z = a* - действительное число, т.е. комплексные числа являются расширением понятия числа, в новом множестве к существующим операциям добавляется возможность извлечения квадратного корня из отрицательных чисел. Чисто комплексным числом называют пару действительных чисел *(x, y)*, записанных в определенном порядке: *z = (x,y)*. Поэтому комплексные числа принято изображать вектором с началом в начале координат, а конец в точке (х,у)

Обозначение *z = x + yi*  называют *алгебраической формой* записи комплексного числа z.

Комплексные числа *a + bi* и *x + yi* считаются *равными*, если *а = х* и *b = y*.

Два комплексных числа *z = a + bi* и $\overbar{z}=a-bi$, отличающиеся только знаками при мнимой части, называют *сопряженными*.

Числа *a + bi* и -*a – bi* называют *противоположными*.

С комплексными числами в алгебраической форме легко выполняются арифметические действия:

1) z1 + z2 = (a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i

Сложение комплексных чисел, изображенных векторами, производится по правилу сложения векторов:



 Рис. 1

 Рис. 2

2) z1∙z2 = (a + bi)∙(x + yi) = ax + ayi + bxi + byi2 = (ax – by) +(ay + bx)i

[i2 = -1]

$$\frac{z\_{1}}{z\_{2}}=\frac{a+bi}{x+yi}∙\frac{x-yi}{x-yi}=\frac{ax-ayi+bxi-byi^{2}}{x^{2}-\left(yi\right)^{2}}=\frac{ax+by}{x^{2}+y^{2}}+\frac{bx-ay}{x^{2}+y^{2}}∙i$$

Геометрически комплексные числа изображают в виде точки М (х, у) или вектора  на числовой плоскости. Ось *Ох* называют действительной осью; *Оу* – мнимой осью, а плоскость *Оху* – комплексной плоскостью (z).



 Рис. 3

Точку *М (х,у)* называют аффиксом числа z.

Модуль вектора *ОМ* называют модулем комплексного числа:

│ОМ│=│z│= r; r = 

Угол *φ* между действительной осью *Ох* и *ОМ* называют *аргументом* комплексного числа z:

*φ = Arg z*. Значение аргумента, заключенное в промежутке –*π < φ ≤ π* (или *0< φ ≤ 2π*), называется *главным значением аргумента*

 (обозначается *φ0 = arg z*).

Т.к. *x = r cos φ, а y = rsinφ*, то *φ = φ0+ 2πk, k € Z.*

Если отсчет ведется против хода часовой стрелки, то угол $φ$ считается положительным, а если по движению часовой стрелки – отрицательным.

z = x + yi = rcos $φ$ +i rsin$φ$ = r(cos $φ$ + isin$ φ$)

Запись такого вида называют *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Эйлер, рассматривая дифференциальное уравнение свободного гармонического колебания, получил его частное решение в двух различных видах: *2cosx и exi+e-xi*. Впоследствии установил:

$\cos(x)=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$ $\sin(x)=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2}$.

При интегрировании линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами Эйлер вывел формулу

exi = cosx + isinx

Комплексное число записанное в виде *z = r∙eφ∙i* называется *показательной формой* записи.

В тригонометрической (показательной) форме комплексные числа удобно перемножать, возводить в степень, извлекать корень:

1. $z\_{1}∙z\_{2}=r\_{1}\left(\cos(φ\_{1})+i∙\sin(φ\_{1})\right)∙r\_{2}\left(\cos(φ\_{2})+i∙\sin(φ\_{2})\right)= $

$$r\_{1}∙r\_{2}\left(\cos(\left(φ\_{1}+φ\_{2}\right))+i∙\sin(\left(φ\_{1}+φ\_{2}\right))\right)$$

 т.е. при перемножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

1. $z^{n}=\left(r\cos(φ)+i∙\sin(φ)\right)^{n}=r^{n}\left(\cos(\left(nφ\right))+i∙\sin(\left(nφ\right))\right)$

3) $\frac{r\_{1}\left(\cos(φ\_{1})+i\sin(φ\_{1})\right)}{r\_{2}\left(\cos(φ\_{2})+i\sin(φ\_{2})\right)}=\frac{r\_{1}}{r\_{2}}\left(\cos(\left(φ\_{1}-φ\_{2}\right))+i\sin(\left(φ\_{1}-φ\_{2}\right))\right)$

4) где k = 0,…,n-1

5) $r\_{1}e^{φ\_{1}i}∙r\_{2}e^{φ\_{2}i}=r\_{1}r\_{2}e^{\left(φ\_{1}+φ\_{2}\right)i}$

6) $\left(re^{φi}\right)^{n}=r^{n}e^{nφi}$

**Пример** 1. Выполнить действия с комплексными числами

z1 = 2 + 3i и z2 = 4 – 2i

а) z1 + z2 = 6 + i

б) z1 - z2 = (2 – 4) + (3 – (-2))i = -2 + 5i

в) z1 ∙z2 = (2 + 3i)∙(4 – 2i) = 8 – 4i + 12i - 6i2 = 8 + 8i + 6 = 14 + 8i (i2 = -1)

г) $\frac{z\_{1}}{z\_{2}}=\frac{2+3i}{4-2i}=\frac{2+3i}{4-2i}∙\frac{4+2i}{4+2i}=\frac{8+4i+12i-6}{4^{2}-\left(2i\right)^{2}}=\frac{2+16i}{20}=\frac{1+8i}{10}=0.1+0.8i$

**Пример** 2. Найти множество точек координатной плоскости Оху, изображающих комплексные числа z, для которых

|z + i – 2| ≤ 2.

Решение: Запишем число z в алгебраической форме

z = x + iy, тогда

z + i – 2 = x + iy + i – 2 = (x – 2) + (y+1)i.

│z + i - 2│= и неравенство примет вид

≤ 2 ↔ (х – 2)2 + (у + 1)2 ≤ 22.

Множество точек плоскости, удовлетворяющих этому неравенству, представляет собой все точки, лежащие внутри окружности и на окружности с центром в точке (2, -1) и радиусом 2.

**Пример** 3. Найти действительные числа х и у из уравнения (2х – 5i) + (7y + 2xi) = -23 + 3yi

Решение: Преобразуем левую часть к виду

(2x + 7y) + (-5 + 2x)i = -23 + 3yi.

По условию равенства комплексных чисел получим систему:

 или  .

**Пример** 4. Вычислить .

Решение: Пусть  (x, y € R)

-15 + 8i = (x + iy)2

-15 + 8i = x2 + 2xyi – y2

 .

Решение системы:

 и 

Тогда А1 = -1 – 4i и A2 = 1 + 4i , т.е. .

**Пример** 5. Выполнить действия:

а) $2\left(\cos(\left(\frac{π}{6}\right))+i∙\sin(\left(\frac{π}{6}\right))\right)∙3\left(\cos(\left(\frac{π}{12}\right))+i∙\sin(\left(\frac{π}{12}\right))\right)=$

$6\left(\cos(\left(\frac{π}{6}+\frac{π}{12}\right))+i∙\sin(\left(\frac{π}{6}+\frac{π}{12}\right))\right)=6\left(\cos(\left(\frac{π}{4}\right))+i∙\sin(\left(\frac{π}{4}\right))\right)=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i∙\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}∙i$ .

b) $\left(\cos(\frac{π}{6})+i∙\sin(\frac{π}{6})\right)^{6}=\cos(\left(6∙\frac{π}{6}\right))+i∙\sin(\left(6∙\frac{π}{6}\right))=\cos(π)+i∙\sin(π)=-1$.

c) $\sqrt{i}=\sqrt{\cos(\left(\frac{π}{2}\right))+i∙\sin(\left(\frac{π}{2}\right))}=\cos(\left(\frac{\frac{π}{2}+2πk}{2}\right))+i∙\sin(\left(\frac{\frac{π}{2}+2πk}{2}\right))=\cos(\left(\frac{π}{4}+πk\right))+i∙\sin(\left(\frac{π}{4}+πk\right) k=0,1)$

При k=0 $z\_{0}=\cos(\left(\frac{π}{4}\right))+i∙\sin(\left(\frac{π}{4}\right))=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}∙i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)$.

При k=1 $z\_{1}=\cos(\left(\frac{π}{4}+π\right))+i∙\sin(\left(\frac{π}{4}+π\right))=-\cos(\frac{π}{4})-i∙\sin(\frac{π}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}∙i$

**Пример 6**. Найти: $е^{2+π∙i}=e^{2}∙e^{π∙i}=e^{2}\left(\cos(π)+i∙\sin(π)\right)=-e^{2}$

**7. Вычислить** $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{9}$ a=1-действительная часть, b=$\sqrt{3}$-мнимая часть,

то $r=\sqrt{a^{2}+b^{2}}$ , $r=\sqrt{1+3}=2$

 $a=r\cos(φ), b=r\sin(φ)$

 $\cos(φ)=\frac{a}{r}=\frac{1}{2}; \sin(φ)=\frac{b}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2} φ=\frac{π}{3}$

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{9}$ =$\left(r\left(\cos(φ)+i∙\sin(φ)\right)\right)^{9}=\left(2\left(\cos(60°)+i∙\sin(60°)\right)\right)^{9}=$

$$2^{9}\left(\cos(\left(9∙\frac{π}{3}\right))+i∙\sin(\left(9∙\frac{π}{3}\right))\right)=2^{9}\left(\cos(3π)+i∙\sin(3π)\right)=512\left(-1+i∙0\right)=-512$$

**8. Найти действительные решения уравнения**:

 (1 + i)x + ( -2 + 5i)y = -4 + 17i

 (x – 2y) + (x + 5y)i = -4 + 17i

 $\left\{\begin{array}{c}x-2y= -4\\x+5y=17\end{array}\right.$

 Вычтем первое уравнение из второго, получим 7у = 21, значит у = 3. Тогда из первого уравнения можно найти х = 2.

 Ответ: (2; 3)

1. **Найти модуль и главное значение аргумента. Записать число в тригонометрической и показательной формах:** $z= -2+2i\sqrt{3}$**.**

a= -2; b = 2$\sqrt{3}$ **→** $r=\sqrt{a^{2}+b^{2}}=\sqrt{\left(-2\right)^{2}+\left(2\sqrt{3} \right)^{2}}=4$

$$\cos(φ)=\frac{a}{r}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}; \sin(φ)=\frac{b}{r}=\frac{ 2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow φ=\frac{2π}{3}=120°$$

$$z=-2+2i\sqrt{3}=4\left(\cos(\frac{2π}{3})+i∙\sin(\frac{2π}{3})\right)=4e^{\frac{2πi}{3}}$$

1. **Вычислить:** $i^{203}=i^{200+3}=\left(i^{4}\right)^{50}∙i^{3}=1∙i^{3}=-i.$

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Найти модуль и главное значение аргумента. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

а) -2

б) 2i

в) -√2 + i√2

д) 1 - i√3

е) (1 – i)/(1 + i)

 **2.** Вычислить:

а) (1 + i√3)9

б) 

в) .

 3. Найти:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{2}{1-3i}$; в) $\frac{1-i}{1+i}$; г) $\left(4+2i\right)\left(5i-7\right)$; д) (1 + i√3)3

 4. Найти действительные решения уравнений:

а) (3x – i)(2 + i) + (x – iy)(1 + 2i) = 5 +6i

б) (3 – 2i)x + (4 + 3i)y = 14 + 2i

в) 

е) 9 + 2ix + 4yi =10i + 5x – 6y

ж) -2 + 5xi – 3yi = 9i + 2x – 4y.