**ОБРАТНАЯ МАТРИЦА**

*ОПР.* *Минором* элемента аij матрицы n-го порядка называется определитель матрицы порядка (n-1), полученной путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца. Обозначается Mij.



*ОПР.* Минор, взятый со знаком (-1)i+j называется *алгебраическим дополнением* элемента аij матрицы А. Обозначается Аij.

**Пример1.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы.



*ОПР.* Матрица А-1 называется *обратной* по отношению к квадратной матрице А, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: А-1А = АА-1 = Е

**Алгоритм вычисления обратной матрицы**

1. Вычислить определитель матрицы.
2. Найти алгебраические дополнения всех элементов.
3. Составить матрицу алгебраических дополнений и транспонировать ее.
4. Найти обратную матрицу по формуле:



1. Проверка: А-1А = АА-1 = Е.

Условие существования обратной матрицы: ׀А ׀≠0

 **Пример 2**. Найти обратную матрицу по отношению к матрице А.

 



**Теорема Лапласа.** Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

∆ = аi1Ai1 + аi2Ai2 + … + аinAin (разложение по элементам i- ой строки)



# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

# **Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:**

# **, где аij – коэффициенты при переменных**


#  **bi – свободные члены**

# **(1)**

# ***Решением* системы называется такая совокупность n чисел (x1 = k1, x2 = k2,… xn = kn), при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.**

# ***Совместная* система уравнений имеет хотя бы одно решение. Несовместная – не имеет решений.**

# **Система называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной,* если решений бесконечное множество.**

# 9. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ СЛАУ

# *Теорема Кронекера – Капелли*. **Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы равны.**

# **Если r < n, система является неопределенной.**

# **Матричный метод**

Если матрица А системы линейных уравнений невырожденная, т.е.
det A  0, то матрица А имеет обратную, и решение системы (1) совпадает с вектором C = A1B. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение. Отыскание решения системы по формуле X=A1B называют *матричным способом решения системы,* или *решением по методу обратной матрицы*.

**Пример 3**. Решить матричным способом систему уравнений

x1 - x2 +  x3 = 6,

2x1 + x2 + x3 = 3,

x1 + x2 +2x3 = 5.

*Решение.* Обозначим (матрица из коэффициентов, матрица-столбец неизвестных, матрица-столбец свободных членов)



Тогда данная система уравнений запишется матричным уравнением AX=B. Поскольку , то матрица A невырождена и поэтому имеет обратную:

.Для получения решения X мы должны умножить вектор-столбец B слева на матрицу A-1:

X = A1B. В данном случае

 и, следовательно, 

Выполняя действия над матрицами, получим:

x1 = 1/5(16+33-25) = 1/5 (6+9-10) = 1,

x2 = 1/5 (-36 +13 - 15) = 1/5 (- 18 + 3 + 5) = -2,

x3 = 1/5 (16 - 23 + 35) = 1/5 (6 -6 + 15) = 3. Итак, Х = (1, -2, 3)T.

**10. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*ОПР.* Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

Очевидно, что однородная система всегда совместна, она имеет нулевое (тривиальное) решение х1 = х2 =…= хn = 0.

При каких условиях однородная система имеет и ненулевые решения?

**Пример 4.**



Поменяли местами строки, избавились от х в двух уравнениях (это разновидность метода Гаусса - выполняем действия с коэффициентами), затем от у в последнем уравнении (в третей строке последней матрицы на втором месте должен быть 0). Так как переменных больше, чем число неизвестных, то «лишние переменные берем за свободные – им можно будет задавать произвольные значения. В данной системе взяли произвольно х3 = х4 = с и выразили х1 и х2 через с. (чаще разные переменные обозначают разными буквами).

Общее решение системы: (14с, 21с, с, с), где с – любое число.

Например: при с = 2, получим (28, 42, 2, 2) – частное решение.

 **Ранг матрицы**

*ОПР.* *Рангом* матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Обозначается r(A).

**Примеры.**





 **Ранг матрицы**

*ОПР.* *Рангом* матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Обозначается r(A).

**Примеры.**





**Решить** **самостоятельно** матричным способом систему:

$$\left\{\begin{array}{c}2x-y+z=-1\\-x +3z=7\\x+y+3z=6\end{array}\right.$$

Решить однородную систему:

$$\left\{\begin{array}{c}x+y+z=0\\3x+6y+5z=0\\x+4y+3z=0\end{array}\right.$$