**Понятие числовой последовательности**

Последовательность – это когда что-то расположено за чем-то. Например, последовательность действий, последовательность времён года. Или когда кто-то расположен за кем-то. Например, последовательность людей в очереди, последовательность слонов на тропе к водопою.

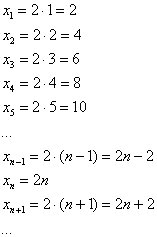
Немедленно проясним характерные признаки последовательности. Во-первых, *члены последовательности* располагаются **строго в определённом порядке**. Так, если  двух человек в очереди поменять местами, то это уже будет **другая** последовательность. Во-вторых, каждому *члену последовательности* можно присвоить порядковый номер:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image002.gif

Числовая последовательность – функция, заданная на множестве натуральных чисел. f(n) = an

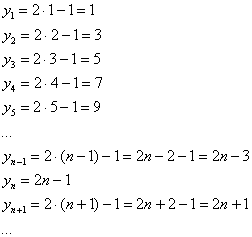
Пусть **каждому** натуральному значению  n  **по некоторому правилу** поставлено в соответствие действительное число  xn. Тогда говорят, что задана числовая последовательность  http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image008.gif.

Да, в математических задачах в отличие от жизненных ситуаций последовательность почти всегда содержит бесконечно много чисел.

При этом:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image010.gif называют первым членом последовательности;  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image012.gif – вторым членом последовательности;  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image014.gif – третьим членом последовательности;  
…  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image016.gif – энным или **общим членом** последовательности;  
…

На практике последовательность обычно задаётся формулой общего члена, например:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image018.gif – последовательность положительных чётных чисел:  


Таким образом, запись http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image018_0000.gif однозначно определяет все члены последовательности – это и есть то правило (формула), по которому натуральным значениям http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image002_0000.gif в соответствие ставятся числа http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image008_0000.gif. Поэтому последовательность часто коротко обозначают общим членом, причём вместо «икс» могут использоваться другие латинские буквы, например:

Последовательность положительных нечётных чисел http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image022.gif:  


Ещё одна распространённая последовательность http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image026.gif:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image028.gif

Как, наверное, многие подметили, переменная «эн» играет роль своеобразного счётчика.

На самом деле с числовыми последовательностями мы имели дело ещё в средних классах школы. Вспомним арифметическую прогрессию. Пусть http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image030.gif – первый член, а http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image032.gif –разность или  шаг арифметической прогрессии. Тогда:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image034.gif – второй член данной прогрессии;  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image036.gif – третий член данной прогрессии;  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image038.gif – четвертый;  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image040.gif – пятый;  
…  
И, очевидно, энный член задаётся рекуррентной формулой http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image042.gif

**Примечание**: в рекуррентной формуле каждый следующий член выражается через предыдущий член или даже через целое множество предыдущих членов.

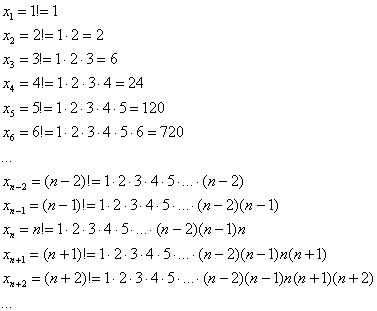
Полученная формула малопригодна на практике – чтобы добраться, скажем, до http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image044.gif, нужно перебрать все предыдущие члены. И в математике выведено более удобное выражение энного члена арифметической прогрессии: http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image046.gif. В нашем случае:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image048.gif

Подставьте в формулу http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image050.gif натуральные номера http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image052.gif и проверьте правильность построенной выше числовой последовательности.

Последовательность http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image082.gif на математическом жаргоне называют «мигалкой»:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image084.gif

Таким образом, **члены последовательности могут повторяться**. Так, в рассмотренном примере последовательность состоит из двух бесконечно чередующихся чисел.

А бывает ли так, что последовательность состоит из одинаковых чисел? Конечно. Например, http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image086.gif задаёт бесконечное количество «троек». Для эстетов есть случай, когда в формуле всё же формально фигурирует «эн»: http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image088.gif

[**Факториал**](http://mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf): http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image090.gif   
Всего лишь свёрнутая запись произведения:  


Разберёмся с последовательностью http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image094.gif.

Сначала подставим в энный член значение http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image096.gif и внимательно проведём вычисления:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image098.gif

Далее подставим в общий член http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image100.gif:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image102.gif

Потом подставим следующий номер http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image104.gif:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image106.gif

Четвёрку:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image108.gif

http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image110.gif

и так далее… .

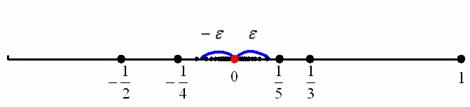
### ****Понятие предела последовательности. Простейшие примеры****

Рассмотрим последовательность: http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image112.gif:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image114.gif

Что происходит, когда «эн» увеличивается до бесконечности? Очевидно, что члены последовательности будут бесконечно близко приближаться к нулю. Это и есть предел данной последовательности, который записывается следующим образом:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image116.gif

Если предел последовательности равен нулю, то её называют [**бесконечно малой**](http://mathprofi.ru/beskonechno_malye_funkcii_zamechatelnye_ekvivalentnosti.html).

В теории математического анализа даётся [**строгое определение предела последовательности**](http://mathprofi.ru/predely_po_koshi.html) через так называемую эпсилон-окрестность.

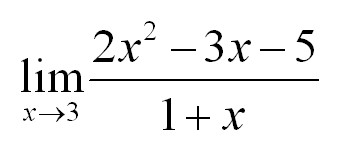
Изобразим на числовой прямой члены последовательности http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image112_0000.gif и симметричную относительно нуля (предела) http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image118.gif-окрестность:  
  
Теперь зажмите синюю окрестность рёбрами ладоней и начинайте её уменьшать, стягивая к пределу (красной точке). Число http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image122.gif является пределом последовательности, если ДЛЯ ЛЮБОЙ заранее выбранной http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image118_0000.gif-окрестности  (сколь угодно малой) внутри неё окажется бесконечно много членов последовательности, а ВНЕ неё – лишь конечное число членов (либо вообще ни одного). То есть эпсилон-окрестность может быть микроскопической, да и того меньше, но «бесконечный хвост» последовательности рано или поздно обязан полностью зайти в данную окрестность.

Если у последовательности http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image006_0000.gif **существует конечный предел**  a, то она называется **сходящейся** (в частности, **бесконечно малой** при http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image122_0000.gif). В противном случае – **расходящейся**, при этом возможны два варианта: либо предела вовсе не существует, либо он бесконечен. В последнем случае последовательность называют **бесконечно большой**. Последовательности http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image135.gif являются бесконечно большими, поскольку их члены уверенным ходом продвигаются к «плюс бесконечности»:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image137.gif

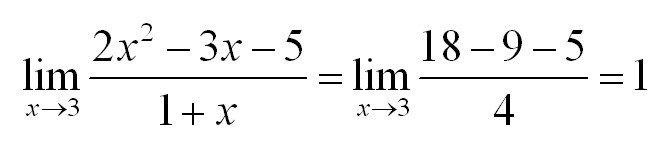
Арифметическая прогрессия с первым членом http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image030_0000.gif и шагом http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image032_0000.gif тоже бесконечно великa:  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image140.gif

К слову, расходится и любая арифметическая прогрессия, за исключением случая с нулевым шагом – когда к конкретному числу http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image142.gif бесконечно добавляется http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image144.gif. Предел такой последовательности существует и совпадает с первым членом.

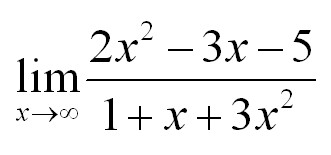
Задача - найти предел (предел функции). Отличие от предела последовательности?



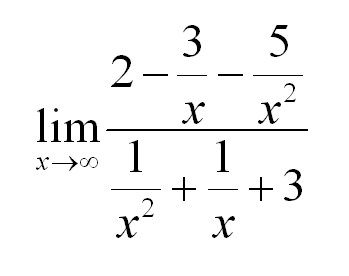
Чтобы решить такой пример, подставим значение ***x=3*** в функцию. Получим:



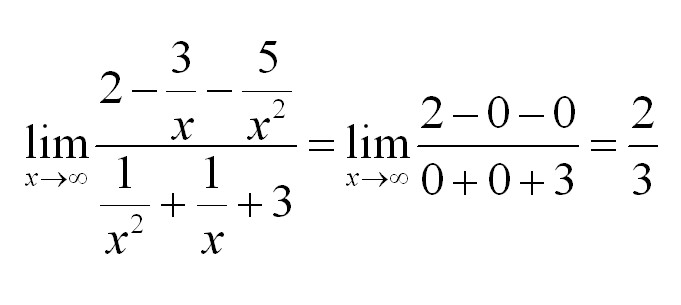
Пусть есть предел:



Если мы попробуем в функцию подставить бесконечность, то получим бесконечность как в числителе, так и в знаменателе. Нужно запомнить, как можно преобразовать функцию таким образом, чтобы неопределенность ушла. В нашем случае разделим числитель и знаменатель на ***х*** в старшей степени. Что получится?



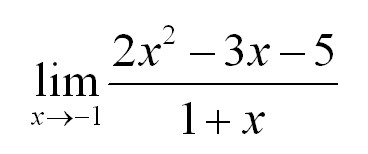
Из уже рассмотренного выше примера мы знаем, что члены, содержащие в знаменателе х, будут стремиться к нулю. Тогда решение предела:



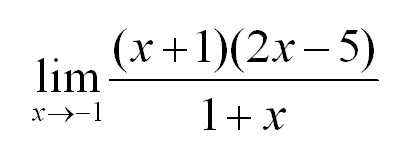
Для раскрытия неопределенностей типа ***бесконечность/бесконечность*** делим числитель и знаменатель на***х*** в высшей степени.

### Еще один вид неопределенностей: 0/0

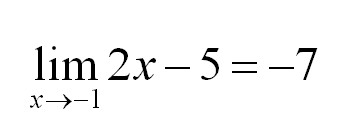
В таких случаях рекомендуется раскладывать числитель и знаменатель на множители. Вычислить предел:



Как всегда, подстановка в функцию значения ***х=-1*** дает ***0*** в числителе и знаменателе. В числителе у нас квадратное уравнение. Найдем корни и запишем:



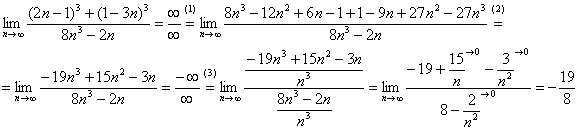
Сократим и получим:



**Итак, если Вы сталкиваетесь с неопределенностью типа *0/0* – раскладывайте числитель и знаменатель на множители.**

Пример 3

Найти предел последовательности  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image041.gif

**Решение**: сначала полное решение, потом пошаговые комментарии:  


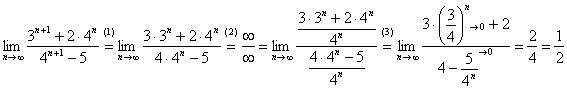
(1) В числителе дважды используем формулу http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image045.gif.

(2) Приводим подобные слагаемые в числителе.

(3) Для устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image047.gif («эн» в старшей степени).

Пример 5

Найти предел последовательности  
http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image051.gif

**Решение** оформим по той же схеме:  


(1) Используя [**свойства степеней**](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf), вынесем из показателей всё лишнее, оставив там только «эн».

(2) Смотрим, какие показательные последовательности есть в пределе: http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image055.gif и выбираем последовательность с **наибольшим** основанием: http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image057.gif. В целях устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image057_0000.gif.

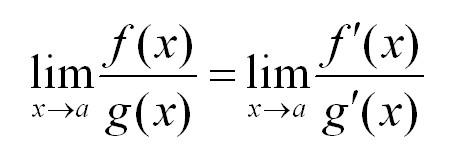
(3) В числителе и знаменателе проводим почленное деление. Поскольку http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image059.gif является бесконечно убывающей геометрической прогрессией http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image061.gif, то она стремится к нулю. И тем более к нулю стремится константа, делённая на растущую прогрессию: http://mathprofi.ru/k/predel_posledovatelnosti_clip_image063.gif.

## Правило Лопиталя в пределах

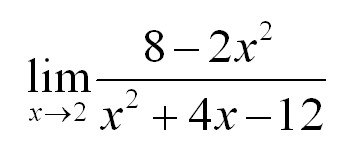
**Еще один мощный способ, позволяющий устранить неопределенности обоих типов. В чем суть метода?**

**Если в пределе есть *неопределенность,* берем производную от числителя и знаменателя до тех пор, пока неопределенность не исчезнет*.***

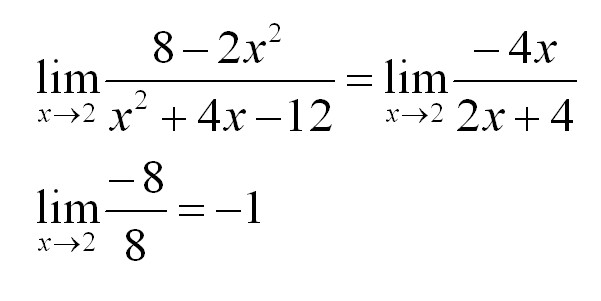
Наглядно правило Лопиталя выглядит так:

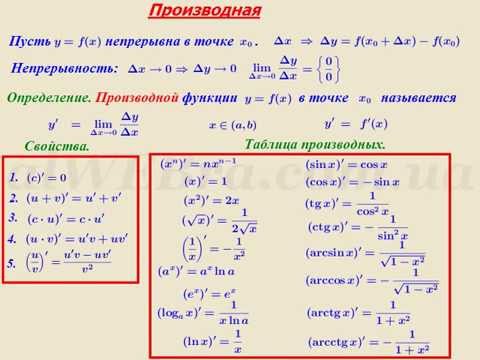


**Важный момент**: предел, в котором вместо числителя и знаменателя стоят производные от числителя и знаменателя, должен существовать.



Налицо типичная неопределенность ***0/0***. Возьмем производные от числителя и знаменателя:

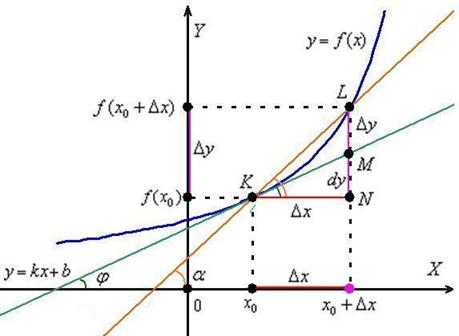




Y= 6x4 → y’=6\*4x3= 24 x3

Y= 7x3 – 5x2 + 4x +17 → y’= 21x2 - 10x + 4\*1 + 0 = 21x2 -10x + 4

=



**Геометрический смысл производной – производная, вычисленная в заданной точке, – это угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в данной точке.**

**(Механический смысл производной)**

Пусть задан путь s=f(x) движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t:

v(t)=s′(t)

**Задание.** Тело движется прямолинейно по закону s(t)= (м). Определить скорость его движения в момент t=10 с.

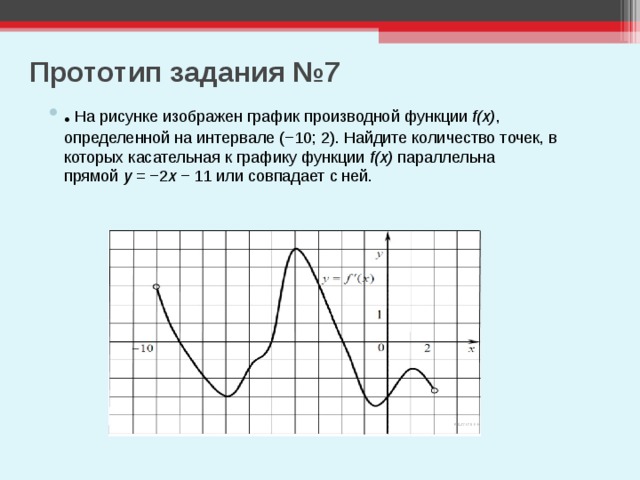
**Решение.** Искомая скорость - это производная от пути, то есть

v(t)=s′(t)=

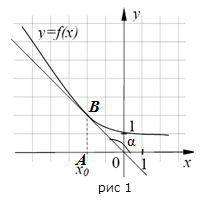
В заданный момент времени

v(10)=2⋅−4⋅10+4=200−40+4=164 (м/с).

**Ответ.** v(10)= 164 (м/с).



K= -2 → y’(x0)= -2 → y = -2→ таких точек 5.



**Задание.** На рисунке №1 изображен график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найти значение f′(x0).

**Решение.** Из геометрического смысла производной получаем, что

f′(x0)=tgα

Найдем угол α. Рассмотрим треугольник AOB - прямоугольный, равнобедренный. Тогда

∠AOB=45,

а значит

α=180−45=135

А отсюда следует, что

f′(x0)=tg135=−1

**Ответ.**

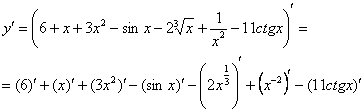
f′(x0)=−1

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image042.gif

Решаем. Как Вы, наверное, уже заметили, первое действие, которое всегда выполняется при нахождении производной, состоит в том, что мы заключаем в скобки всё выражение и ставим штрих справа вверху:

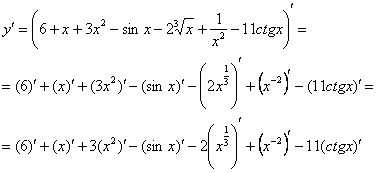
http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image044.gif

Применяем второе правило:



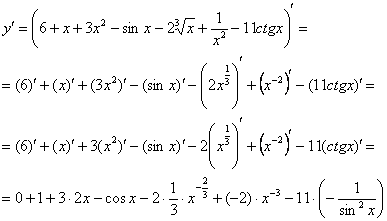
Обратите внимание, что для дифференцирования все корни, степени нужно представить в виде http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image048.gif, а если они находятся в знаменателе, то переместить их вверх. Как это сделать – рассмотрено в моих методических материалах.

Теперь вспоминаем о первом правиле дифференцирования – постоянные множители (числа) выносим за знак производной:

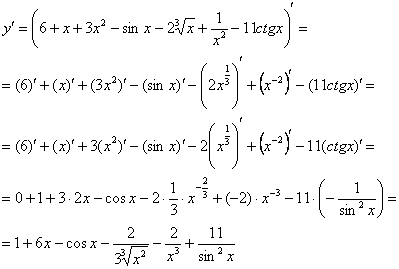


Обычно в ходе решения эти два правила применяют одновременно (чтобы не переписывать лишний раз длинное выражение).

Все функции, находящиеся под штрихами, являются элементарными табличными функциями, с помощью таблицы осуществляем превращение:



Можно всё оставить в таком виде, так как штрихов больше нет, и производная найдена. Тем не менее, подобные выражения обычно упрощают:



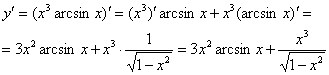
**Производная произведения функций**

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image060.gif

Пример 5

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image062.gif

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image064.gif.  
Сначала применяем наше правило, а затем превращаем функции по таблице производных:



Пример 6

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image068.gif

В данной функции содержится сумма http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image070.gif и произведение двух функций –  квадратного трехчлена http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image072.gif  и логарифма http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image074.gif.

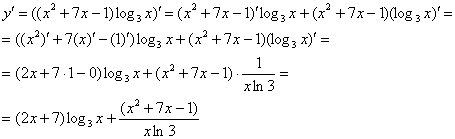
**СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image076.gif

Теперь для скобки http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image078.gif используем два первых правила:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image080.gif

В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только элементарные функции, по таблице производных превращаем их в другие функции:



**Производная частного функций**  
  
http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image089.gif

Пример 8

Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image091.gif

Чего здесь только нет – сумма, разность, произведение, дробь…. **В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ** для начала рисуем скобочки и справа вверху ставим штрих:

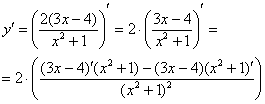
http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image093.gif

Теперь смотрим на выражение в скобках, как бы его упростить? В данном случае замечаем множитель, который согласно первому правилу целесообразно вынести за знак производной:

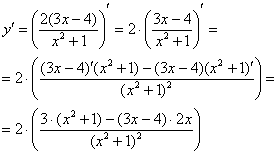
http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image095.gif

Заодно избавляемся от скобок в числителе, которые теперь не нужны.  
Вообще говоря, постоянные множители при нахождении производной можно и не выносить, но в этом случае они будут «путаться под ногами», что загромождает и затрудняет решение.

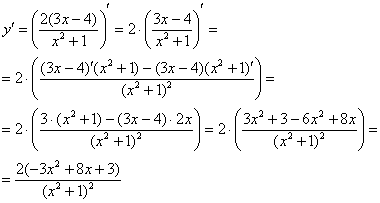
Смотрим на наше выражение в скобках. У нас есть сложение, вычитание и деление. Со школы мы помним, что деление выполняется в первую очередь. И здесь – сначала применяем правило дифференцирования частного:



Применяем первое и второе правило, здесь это сделаем устно, надеюсь, Вы уже немного освоились в производных:



Штрихов больше нет, задание выполнено.

На практике обычно (но не всегда) ответ упрощают «школьными» методами:  
  


Исследуем функцию с помощью производных:

1. Область определения функции (какие значения может принимать х?)

Х2 – 1 не должно равняться 0??? Значит х не должен быть равен +1 и -1, то есть .

х = +1 и х = -1 – точки разрыва.

1. Функция разрывна.
2. Функция нечетна (при смене знака х, у тоже меняет свой знак (числитель!). Значит график симметричен началу кооринат.
3. Нули функции: у=0 при х=0.
4. Найдем первую производную функции (производная дроби):

= . Приравняем производную к 0. значит х=0, или - это критические точки первого порядка.

Определим знак производной в каждом интервале (с учетом точек разрыва):

При значит функция возрастает;

при , значит функция убывает;

при , значит функция убывает;

, значит функция убывает;

при , значит функция убывает

y’ значит функция возрастает.

1. - точка максимума функции

точка минимума функции.

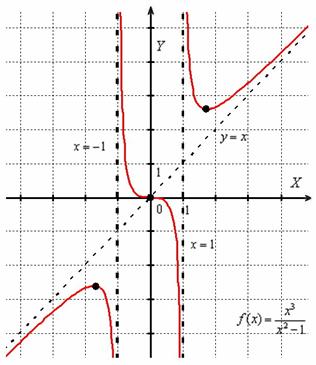
= уминимальное

= умаксимальное

1. Асимптоты графика функции: так как х = 1 и х = -1 точки разрыва, то уравнения х = 1 и х = -1 задают вертикальные асимптоты(прямые, к которым график неограниченно приближается).

Наклонные асимптоты задаются уравнением y = kx+b, где

Уравнение наклонной асимптоты у =х



Попробовать самостоятельно к завтрашнему дню исследовать функцию и построить график

а)

б)