**Понятие числовой последовательности**

 Последовательность – это когда что-то расположено за чем-то. Например, последовательность действий, последовательность времён года. Или когда кто-то расположен за кем-то. Например, последовательность людей в очереди, последовательность слонов на тропе к водопою.

Немедленно проясним характерные признаки последовательности. Во-первых, *члены последовательности* располагаются **строго в определённом порядке**. Так, если  двух человек в очереди поменять местами, то это уже будет **другая** последовательность. Во-вторых, каждому *члену последовательности* можно присвоить порядковый номер:


 Числовая последовательность – функция, заданная на множестве натуральных чисел. f(n) = an

 Пусть **каждому** натуральному значению  n  **по некоторому правилу** поставлено в соответствие действительное число  xn. Тогда говорят, что задана числовая последовательность  .

Да, в математических задачах в отличие от жизненных ситуаций последовательность почти всегда содержит бесконечно много чисел.

При этом:
 называют первым членом последовательности;
 – вторым членом последовательности;
 – третьим членом последовательности;
…
 – энным или **общим членом** последовательности;
…

На практике последовательность обычно задаётся формулой общего члена, например:
 – последовательность положительных чётных чисел:


Таким образом, запись  однозначно определяет все члены последовательности – это и есть то правило (формула), по которому натуральным значениям  в соответствие ставятся числа . Поэтому последовательность часто коротко обозначают общим членом, причём вместо «икс» могут использоваться другие латинские буквы, например:

Последовательность положительных нечётных чисел :


Ещё одна распространённая последовательность :


Как, наверное, многие подметили, переменная «эн» играет роль своеобразного счётчика.

На самом деле с числовыми последовательностями мы имели дело ещё в средних классах школы. Вспомним арифметическую прогрессию. Пусть  – первый член, а  –разность или  шаг арифметической прогрессии. Тогда:
 – второй член данной прогрессии;
 – третий член данной прогрессии;
 – четвертый;
 – пятый;
…
И, очевидно, энный член задаётся рекуррентной формулой 

**Примечание**: в рекуррентной формуле каждый следующий член выражается через предыдущий член или даже через целое множество предыдущих членов.

Полученная формула малопригодна на практике – чтобы добраться, скажем, до , нужно перебрать все предыдущие члены. И в математике выведено более удобное выражение энного члена арифметической прогрессии: . В нашем случае:


Подставьте в формулу  натуральные номера  и проверьте правильность построенной выше числовой последовательности.

Последовательность  на математическом жаргоне называют «мигалкой»:


Таким образом, **члены последовательности могут повторяться**. Так, в рассмотренном примере последовательность состоит из двух бесконечно чередующихся чисел.

А бывает ли так, что последовательность состоит из одинаковых чисел? Конечно. Например,  задаёт бесконечное количество «троек». Для эстетов есть случай, когда в формуле всё же формально фигурирует «эн»: 

[**Факториал**](http://mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf): 
Всего лишь свёрнутая запись произведения:


Разберёмся с последовательностью .

Сначала подставим в энный член значение  и внимательно проведём вычисления:


Далее подставим в общий член :


Потом подставим следующий номер :


Четвёрку:




и так далее… .

### ****Понятие предела последовательности. Простейшие примеры****

Рассмотрим последовательность: :


Что происходит, когда «эн» увеличивается до бесконечности? Очевидно, что члены последовательности будут бесконечно близко приближаться к нулю. Это и есть предел данной последовательности, который записывается следующим образом:


Если предел последовательности равен нулю, то её называют [**бесконечно малой**](http://mathprofi.ru/beskonechno_malye_funkcii_zamechatelnye_ekvivalentnosti.html).

В теории математического анализа даётся [**строгое определение предела последовательности**](http://mathprofi.ru/predely_po_koshi.html) через так называемую эпсилон-окрестность.

Изобразим на числовой прямой члены последовательности  и симметричную относительно нуля (предела) -окрестность:

Теперь зажмите синюю окрестность рёбрами ладоней и начинайте её уменьшать, стягивая к пределу (красной точке). Число  является пределом последовательности, если ДЛЯ ЛЮБОЙ заранее выбранной -окрестности  (сколь угодно малой) внутри неё окажется бесконечно много членов последовательности, а ВНЕ неё – лишь конечное число членов (либо вообще ни одного). То есть эпсилон-окрестность может быть микроскопической, да и того меньше, но «бесконечный хвост» последовательности рано или поздно обязан полностью зайти в данную окрестность.

Если у последовательности  **существует конечный предел**  a, то она называется **сходящейся** (в частности, **бесконечно малой** при ). В противном случае – **расходящейся**, при этом возможны два варианта: либо предела вовсе не существует, либо он бесконечен. В последнем случае последовательность называют **бесконечно большой**. Последовательности  являются бесконечно большими, поскольку их члены уверенным ходом продвигаются к «плюс бесконечности»:


Арифметическая прогрессия с первым членом  и шагом  тоже бесконечно великa:


К слову, расходится и любая арифметическая прогрессия, за исключением случая с нулевым шагом – когда к конкретному числу  бесконечно добавляется . Предел такой последовательности существует и совпадает с первым членом.

Задача - найти предел (предел функции). Отличие от предела последовательности?



Чтобы решить такой пример, подставим значение ***x=3*** в функцию. Получим:



Пусть есть предел:



Если мы попробуем в функцию подставить бесконечность, то получим бесконечность как в числителе, так и в знаменателе. Нужно запомнить, как можно преобразовать функцию таким образом, чтобы неопределенность ушла. В нашем случае разделим числитель и знаменатель на ***х*** в старшей степени. Что получится?



Из уже рассмотренного выше примера мы знаем, что члены, содержащие в знаменателе х, будут стремиться к нулю. Тогда решение предела:



Для раскрытия неопределенностей типа ***бесконечность/бесконечность*** делим числитель и знаменатель на***х*** в высшей степени.

### Еще один вид неопределенностей: 0/0

В таких случаях рекомендуется раскладывать числитель и знаменатель на множители. Вычислить предел:



Как всегда, подстановка в функцию значения ***х=-1*** дает ***0*** в числителе и знаменателе. В числителе у нас квадратное уравнение. Найдем корни и запишем:



Сократим и получим:



**Итак, если Вы сталкиваетесь с неопределенностью типа *0/0* – раскладывайте числитель и знаменатель на множители.**

Пример 3

Найти предел последовательности


**Решение**: сначала полное решение, потом пошаговые комментарии:


(1) В числителе дважды используем формулу .

(2) Приводим подобные слагаемые в числителе.

(3) Для устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на  («эн» в старшей степени).

Пример 5

Найти предел последовательности


**Решение** оформим по той же схеме:


(1) Используя [**свойства степеней**](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf), вынесем из показателей всё лишнее, оставив там только «эн».

(2) Смотрим, какие показательные последовательности есть в пределе:  и выбираем последовательность с **наибольшим** основанием: . В целях устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на .

(3) В числителе и знаменателе проводим почленное деление. Поскольку  является бесконечно убывающей геометрической прогрессией , то она стремится к нулю. И тем более к нулю стремится константа, делённая на растущую прогрессию: .

## Правило Лопиталя в пределах

**Еще один мощный способ, позволяющий устранить неопределенности обоих типов. В чем суть метода?**

**Если в пределе есть *неопределенность,* берем производную от числителя и знаменателя до тех пор, пока неопределенность не исчезнет*.***

Наглядно правило Лопиталя выглядит так:



**Важный момент**: предел, в котором вместо числителя и знаменателя стоят производные от числителя и знаменателя, должен существовать.



Налицо типичная неопределенность ***0/0***. Возьмем производные от числителя и знаменателя:





$\left(x^{5}\right)^{'}=5x^{4}$

Y= 6x4 → y’=6\*4x3= 24 x3

Y= 7x3 – 5x2 + 4x +17 → y’= 21x2 - 10x + 4\*1 + 0 = 21x2 -10x + 4

$$\left(x^{3}∙\sin(x)\right)^{'}=\left(x^{3}\right)^{'}∙\sin(x)+x^{3}∙\left(\sin(x)\right)^{'}=3x^{2}∙\sin(x)+x^{3}∙\cos(x)$$

$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^{'}=\frac{\left(\sin(x)\right)^{'}∙\cos(x)-\sin(x)∙\left(\cos(x)\right)^{'}}{\left(\cos(x)\right)^{2}}=\frac{\cos(x)∙\cos(x)-\sin(x)∙\left(-\sin(x)\right)}{cos^{2}x}= \frac{1}{cos^{2}x}$=$\left(tgx\right)^{'}$



$$tg∝=\frac{NL}{KN}=\frac{∆y}{∆x} \rightarrow tgφ=k при ∆x\rightarrow 0$$

**Геометрический смысл производной – производная, вычисленная в заданной точке, – это угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в данной точке.**

$$у^{'}\left(x\_{0}\right)=k\_{касат.}$$

**(Механический смысл производной)**

Пусть задан путь s=f(x) движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t:

v(t)=s′(t)

**Задание.** Тело движется прямолинейно по закону s(t)= $\frac{2}{3}t^{3}-2t^{2}+4t$ (м). Определить скорость его движения в момент t=10 с.

**Решение.** Искомая скорость - это производная от пути, то есть

v(t)=s′(t)= $\frac{2}{3}∙3t^{2}-2∙2t+4∙1=2t^{2}-4t+4$

В заданный момент времени

v(10)=2⋅$10^{2}$−4⋅10+4=200−40+4=164 (м/с).

**Ответ.** v(10)= 164 (м/с).



K= -2 → y’(x0)= -2 → y = -2→ таких точек 5.



**Задание.** На рисунке №1 изображен график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найти значение f′(x0).

**Решение.** Из геометрического смысла производной получаем, что

f′(x0)=tgα

Найдем угол α. Рассмотрим треугольник AOB - прямоугольный, равнобедренный. Тогда

∠AOB=45$°$,

 а значит

α=180$°$−45$°$=135$°$

А отсюда следует, что

f′(x0)=tg135$°$=−1

**Ответ.**

f′(x0)=−1

Найти производную функции 

Решаем. Как Вы, наверное, уже заметили, первое действие, которое всегда выполняется при нахождении производной, состоит в том, что мы заключаем в скобки всё выражение и ставим штрих справа вверху:



Применяем второе правило:



Обратите внимание, что для дифференцирования все корни, степени нужно представить в виде , а если они находятся в знаменателе, то переместить их вверх. Как это сделать – рассмотрено в моих методических материалах.

Теперь вспоминаем о первом правиле дифференцирования – постоянные множители (числа) выносим за знак производной:



Обычно в ходе решения эти два правила применяют одновременно (чтобы не переписывать лишний раз длинное выражение).

Все функции, находящиеся под штрихами, являются элементарными табличными функциями, с помощью таблицы осуществляем превращение:



Можно всё оставить в таком виде, так как штрихов больше нет, и производная найдена. Тем не менее, подобные выражения обычно упрощают:



**Производная произведения функций**



Пример 5

Найти производную функции 

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от .
Сначала применяем наше правило, а затем превращаем функции по таблице производных:



Пример 6

Найти производную функции 

В данной функции содержится сумма  и произведение двух функций –  квадратного трехчлена   и логарифма .

**СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения:



Теперь для скобки  используем два первых правила:



В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только элементарные функции, по таблице производных превращаем их в другие функции:



**Производная частного функций**



Пример 8

Найти производную функции 

Чего здесь только нет – сумма, разность, произведение, дробь…. **В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ** для начала рисуем скобочки и справа вверху ставим штрих:



Теперь смотрим на выражение в скобках, как бы его упростить? В данном случае замечаем множитель, который согласно первому правилу целесообразно вынести за знак производной:



Заодно избавляемся от скобок в числителе, которые теперь не нужны.
Вообще говоря, постоянные множители при нахождении производной можно и не выносить, но в этом случае они будут «путаться под ногами», что загромождает и затрудняет решение.

Смотрим на наше выражение в скобках. У нас есть сложение, вычитание и деление. Со школы мы помним, что деление выполняется в первую очередь. И здесь – сначала применяем правило дифференцирования частного:



Применяем первое и второе правило, здесь это сделаем устно, надеюсь, Вы уже немного освоились в производных:



Штрихов больше нет, задание выполнено.

На практике обычно (но не всегда) ответ упрощают «школьными» методами:



Исследуем функцию с помощью производных: $у=\frac{х^{3}}{х^{2}-1}$

1. Область определения функции (какие значения может принимать х?)

Х2 – 1 не должно равняться 0??? Значит х не должен быть равен +1 и -1, то есть $х\in \left(-\infty ; -1\right)∪\left(-1; +1\right)∪\left(+1; +\infty \right)$.

х = +1 и х = -1 – точки разрыва.

1. Функция разрывна.
2. Функция нечетна (при смене знака х, у тоже меняет свой знак (числитель!). Значит график симметричен началу кооринат.
3. Нули функции: у=0 при х=0.
4. Найдем первую производную функции (производная дроби):

 $y^{'}=\left(\frac{x^{3}}{x^{2}-1}\right)^{'}=\frac{\left(x^{3}\right)^{'}\left(x^{2}-1\right)-x^{3}\left(x^{2}-1\right)^{'}}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$ =$\frac{3x^{2}\left(x^{2}-1\right)-x^{3}∙2x}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}=\frac{3x^{4}-3x^{2}-2x^{4}}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}=\frac{x^{4}-3x^{2}}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$ . Приравняем производную к 0. $х^{4}-3х^{2}=х^{2}\left(х^{2}-3\right)=0, $значит х=0, или $х=\pm \sqrt{3}$ - это критические точки первого порядка.

 Определим знак производной в каждом интервале (с учетом точек разрыва):

При $х<-\sqrt{3, } у^{'}>0,$ значит функция возрастает;

при $-\sqrt{3}<х<-1, y'<0$, значит функция убывает;

при $-1<x<0, y'<0$, значит функция убывает;

 $0<x<1, y'<0$, значит функция убывает;

при $1<x<\sqrt{3, }$ $y'<0$, значит функция убывает

$x>\sqrt{3}$ y’$>0,$ значит функция возрастает.

1. $х=-\sqrt{3}$- точка максимума функции

$х=\sqrt{3}-$ точка минимума функции.

$у\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2}-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=2,6$= уминимальное

$у\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^{3}}{\left(-\sqrt{3}\right)^{2}-1}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-2,6$= умаксимальное

1. Асимптоты графика функции: так как х = 1 и х = -1 точки разрыва, то уравнения х = 1 и х = -1 задают вертикальные асимптоты(прямые, к которым график неограниченно приближается).

Наклонные асимптоты задаются уравнением y = kx+b, где

$k=\lim\_{x\to \infty }\frac{y}{x}$ $b=\lim\_{x\to \infty }\left(y-kx\right)$

$$k=\lim\_{x\to \infty }\frac{\frac{x^{3}}{x^{2}-1}}{x}=\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{2}}{x^{2}-1}=1$$

$$b=\lim\_{x\to \infty }\left(\frac{x^{3}}{x^{2}-1}-x\right)=\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{3}-x^{3}+x}{x^{2}-1}=0$$

Уравнение наклонной асимптоты у =х



Попробовать самостоятельно к завтрашнему дню исследовать функцию и построить график

а) $у=\frac{х^{2}-4}{х^{2}+4}$

б) $у=\frac{х^{3}+4}{х^{2}}$