Бином Ньютона

$$\left(а+в\right)^{2}=а^{2}+2ав+в^{2}$$

$$\left(а+в\right)^{3}=а^{3}+3а^{2}в+3ав^{2}+в^{3}$$

$$\left(a+b\right)^{n}=C\_{n}^{0}a^{n}+C\_{n}^{1}a^{n-1}b^{1}+C\_{n}^{2}a^{n-2}b^{2}+…+C\_{n}^{n}b^{n}$$

$C\_{n}^{m}$ - биномиальные коэффициенты

**Пример 1**. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить .

Решение:



**Треугольник Паскаля**

*Например*, при  треугольник Паскаля имеет вид:



Значит, .

**Пример 2**. Найти сумму биномиальных коэффициентов.

Пусть а = в = 1, тогда

$$\left(1+1\right)^{n}=C\_{n}^{0}+C\_{n}^{1}+C\_{n}^{2}+…+C\_{n}^{n}=2^{n}$$

$C\_{n}^{m}=C\_{n}^{n-m}$ – коэффициенты, равноотстоящие от концов разложения, равны.

**?? Пример 3.** Найти 13-й член разложения бинома

                                           .

Решение. Согласно формуле общего члена разложения бинома,



**Пример 4**. Найти номер члена разложения бинома , не содержащего *х*.

Решение. Для общего члена разложения имеем                         

Член  разложения не зависит от *x*; это значит, что показатель степени *x*равен 0, только тогда, когда,  16 – 4*m*= 0, *m*= 4.

Итак, пятый член данного разложения не зависит от *х*.

**Пример 5**. Построить треугольник Паскаля для нахождения
коэффициентов разложения бинома Ньютона .

Решение.

|  |  |
| --- | --- |
| *n* |                                                          http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1305.jpg |
| 0 |                                                           1 |
| 1 |                                                         1   1 |
| 2 |                                                      1   2   1 |
| 3 |                                                    1   3   3   1 |
| 4 |                                                 1   4   6   4   1 |
| 5 |                                             1   5   10   10  5   1 |
| 6 |                                         1   6   15   20   15   6   1 |
| 7 |                                      1   7   21   35   35   21   7   1 |
|  |                                    http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1306.jpg http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1307.jpg http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1308.jpg http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1309.jpg http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1310.jpg http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1311.jpg http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1312.jpg http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/img/img_1313.jpg |

**Пример 6.** Найдите 5-й член в выражении (2x - 5y)6.

**Решение:** Во-первых, отмечаем, что 5 = 4 + 1. Тогда k = 4, a = 2x, b = -5y, и n = 6. Тогда 5-й член выражения будет

$$С\_{6}^{4}\left(2х\right)^{6-4}\left(-5у\right)^{4}, или \frac{6!}{4!∙2!}\left(2х\right)^{2}\left(-5у\right)^{4}, или 37,5х^{2}у^{4}$$

**Самостоятельно:**

1. Найдите разложение бинома.
2. Найдите 8-й член в выражении (3x - 2)10.

3.  ; Ответ: .

4. ; Ответ:.

1. Найти два средних члена разложения .
2. 
3. Сколько различных диагоналей можно провести в выпуклом одиннадцатиугольнике?
4. Из ящика, где находятся 16 шаров, пронумерованных от 1 до 16, берут 4 шара. Определить число возможных комбинаций.
5. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 19?
6. Сколько чисел, больших 1000000, можно составить из цифр 3, 0, 6, 7, 4, 1, 3? (цифры в числе не повторяются)
7. Доказать, что при любом натуральном n число an делится на 11.

 $a\_{n}=6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}$

Решения:

1. Найдите разложение бинома.

$$a^{11}+11a^{10}b+55a^{9}b^{2}+165a^{8}b^{3}+330a^{7}b^{4}+462a^{6}b^{5}+462a^{5}b^{6}+330a^{4}b^{7}+165a^{3}b^{8}+55a^{2}b^{9}+11ab^{10}+b^{11}$$

1. (3x - 2)10 $T\_{7+1}=C\_{10}^{7}\left(3x\right)^{10-7}\left(-2\right)^{7}=\frac{10!}{7!∙3!}\left(3x\right)^{3}\left(-2\right)^{7}=-\frac{8∙9∙10∙27∙x^{3}2^{7}}{1∙2∙3}=414720x^{3}$
2. $T\_{12}=T\_{11+1}=C\_{23}^{11}\left(a^{3}\right)^{23-11}\left(-ab\right)^{11}$= $-C\_{23}^{11}a^{36}∙a^{11}b^{11}=-C\_{23}^{11}∙a^{47}∙b^{11}$
3. $\left(1+\sqrt{2}\right)^{5}=1∙1^{5}+5∙\sqrt{2}+10\left(\sqrt{2}\right)^{2}+10∙\left(\sqrt{2}\right)^{3}+5∙\left(\sqrt{2}\right)^{4}+\left(\sqrt{2}\right)^{5}=1+5\sqrt{2}+20+20\sqrt{2}+20+4\sqrt{2}$
4. $C\_{11}^{2}=\frac{11!}{9!∙2!}=10∙\frac{11}{2}=55$ - это всего отрезков, соединяющих 11 точек; 55 – 11= 44 – количество диагоналей без сторон.
5. $А\_{16}^{4}=\frac{16!}{12!}=13∙14∙15∙16=43680$ ??
6. $А\_{6}^{2}=\frac{6!}{4!}=5∙6=30$
7. N=6$∙P\_{6}=6∙6!=6∙1∙2∙3∙4∙5∙6=4320$
8. Пусть n =1, тогда $a\_{n}=6^{2}+3^{3}+3^{1}=36+27+3=66\vdots 11$-верно;

Предположение: при n=k, ($6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}$ ) $\vdots 11$-верно, тогда докажем, что верно при

n=k+1 $\rightarrow \left(6^{2\left(k+1\right)}+3^{\left(k+1\right)+2}+3^{k+1}\right)\vdots 11$

$\left(6^{2\left(k+1\right)}+3^{\left(k+1\right)+2}+3^{k+1}\right)=6^{2k}6^{2}+3^{k+2}∙3+3∙3^{k}=3\left(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}\right)+33∙6^{2k}$ - верно, так как первое слагаемое делится на 11 по предположению, второе слагаемое делится на 11, так как один из множителей (33) делится на 11. Ч.т.д.