**Законы распределения дискретной случайной величины**

1. **Биномиальный закон распределения**: пусть проводится серия из **n** независимых опытов, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью р и не появиться с вероятностью q=1-p . Случайная величина Х – число появлений события А в этой серии испытаний. Вероятность того, что Х примет значение m , вычисляется по формуле: , где m=0,1,2…n

Числовые характеристики биномиального распределения:

**M(X)=np, D(X)=npq, σ(X)=**

**Пример1**: Всхожесть семя редиса 90%. Наудачу взяли 5 семян. Составить закон распределения случайной величины Х – число невсхожих семян среди взятых.

Решение: Случайная величина Хможет принимать значения0, 1, 2, 3, 4, 5. Причем вероятность невсхожести для каждого семени равна 0,1. То есть имеем биномиальное распределение. Вероятность того, что случайная величина Х примет одно из своих значений, вычисляется по формуле Бернулли:

Р(Х=0) = 0,95 = 0,59049

Р(Х=1) = С15\*0,1\*0,94 = 0,32805

Р(Х=2) = С25 0,12\*0,93 =0,0729

Р(Х=3) = С35\*0,13\*0,92 = 0,0081

Р(Х=4) =С45\*0,14\*0,9 = 0,00045

Р(Х=5) = 0,15 = 0,00001 Проверка правильности: 0,59049+0,32805+0,0729+0,0081+0,00045+0,00001= 1

Закон распределения СВХ примет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Р | 0,59049 | 0,32805 | 0,0729 | 0,0081 | 0,00045 | 0,00001 |

1. **Геометрическое распределение**: пусть проводится серия из **n** независимых опытов, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью р и не появиться с вероятностью q=1-p. Испытания прекращаются, как только событие А наступает. СВХ – число испытаний, проведенных до первого появления события А. Вероятность того, что Х примет значение m , вычисляют по формуле , где m= 1,2…n.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 3 | … | k | … |
| P | q | q\*p | q2\*p |  | qk-1\*p |  |

***Пример 2***. После удачного выстрела по мишени стрелку выдается новый патрон. Если стрелок промахнется, то ему больше не разрешают стрелять. Вероятность попадания стрелком при одном выстреле равна 0,8. Составить закон распределения СВХ – числа выданных патронов.

Решение. СВХ может принимать значения 1, 2, 3 , 4,… .Вероятность попадания при одном выстреле одинакова и испытания прекращаются, как только стрелок промахнется. Это геометрическое распределение.

Р(Х=1)= 0,2-вероятность того, что стрелок промахнулся в первый же раз больше патронов не получит.

Р(Х=2)= 0,8\*0,2 = 0,16 –вероятность того, что первый выстрел - попадание, второй - промах.

Р(Х=3)= 0,8\*0,8\*0,2 = 0,128 (два попадания и промах)

Р(Х=4) = 0,8\*0,8\*0,8\*0,2 = 0,1024

Закон распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
| Р | 0,2 | 0,16 | 0,128 | 0,1024 | … |

Контроль: сумма убывающей геометрической прогрессии равна .

1. **Гипергеометрическое распределение**: пусть имеется партия из N изделий, среди которых M обладают некоторым свойством. Наугад выбирается n изделий. СВ Х – количество изделий в выборке, обладающих данным свойством. Вероятность того, что Х примет значение m, вычисляется по формуле

**Пример 3:** В партии из 10 деталей 8 стандартных. Наудачу взяты 3 детали. Случайная величина Х – количество нестандартных деталей среди отобранных. Составить закон распределения СВХ.

Решение: СВХ может принимать значения 0, 1, 2, так как нестандартных деталей всего 2. Это гипергеометрическое распределение.

Закон имеет вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 0 | 1 | 2 |
| Р | 7/15 | 7/15 | 1/15 |

Контроль: 7/15 + 7/15 + 1/15 = 1.

1. Распределение Пуассона (вероятность массовых редких событий): пусть производится серия из n независимых испытаний ( n достаточно велико), в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна р (р достаточно мало). Случайная величина Х – число появлений события А в этой серии испытаний. Вероятность того, что Х примет значение m, вычисляется по формуле , где ƛ= n\*p. Примеры СВ, распределённых по закону Пуассона:

* число атомов радиоактивного вещества, распадающихся за определённый промежуток времени;
* число вызовов, поступающих на АТС в дневное время;
* число отказов отдельных элементов в сложных устройствах.

**Пример 4***.* Устройство содержит 1000 ламп, каждая из которых может с вероятностью 0,0004 выйти из строя в течение некоторого промежутка времени. Какова вероятность этого промежутка, в течение которого выйдет из строя не более трёх ламп?

Решение: Пусть χ – число вышедших из строя ламп.

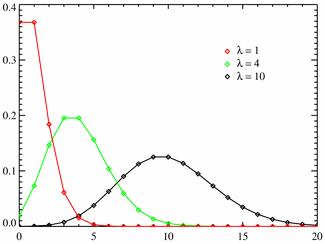
n = 1000; p = 0.0004; λ = np = 0.4



Числовые характеристики для распределения Пуассона:

M(X)=λ, D(X)=λ, σ(X)=.

Разные многоугольники распределения при λ=1;4;10



**Законы распределения непрерывных случайных величин.**

1. **Показательное распределение непрерывной СВ**

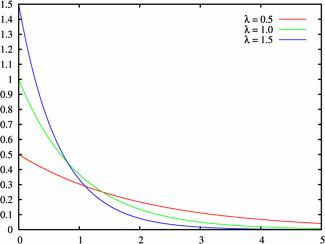
Экспоненциальное или показательное распределение — абсолютно непрерывное распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события. Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение.

Плотность распределения величины X (везде λ>0):

Числовые характеристики можно найти по формулам:

M(X)=1/λ, D(X)=1/λ2, σ=1/λ.

Плотность распределения при различных значениях λ>0:



**Функцией надежности** R(t) называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы за время t:

1. **Равномерное распределение НСВ**

Распределение вероятностей называют равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение. Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления, при проведении числовых расчётов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке), в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчинённых заданному распределению.

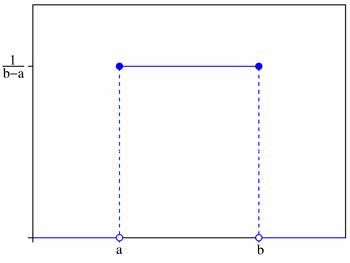
Плотность распределения на отрезке (a;b):

Функция распределения:

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины:

M(X) =, D(X) =,

График плотности вероятностей:



1. **Нормальное распределение или распределение Гаусса НСВ**

Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса, – распределение вероятностей, которое играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике.

Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех. Ясно, что такая ситуация крайне распространена, поэтому можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение — отсюда и произошло одно из его названий.

Плотность распределения нормальной случайной величины X имеет вид:

X=N( f(x)=.

Числовые характеристики для нормального распределения:

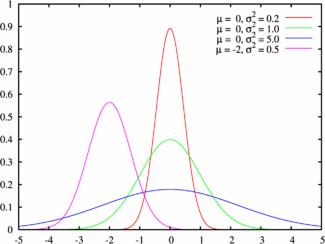
M(X) = a, D(X)=

Значение случайной величины Х, при котором плотность распределения имеет наибольшее значение, называется **модой (М0**). Для случайной величины Х мода совпадает с математическим ожиданием М(х).

Число Ме, называется медианой, если оно удовлетворяет равенству

, где Ф(х) –функция Лапласа

Пример графика плотности распределения для различных значений среднего и СКО:



Вероятность того, что непрерывная СВХ отклоняется от своего математического ожидания по модулю не более чем на величину

Пусть , где -среднее квадратическое отклонение СВХ, тогда

при t =1 P

при t =2 P

при t =3 P

Последняя формула носит название «**правило трех сигм**» и означает, что если случайная величина Х распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения. Такое событие происходит почти наверняка.

**Пример 5** : Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины Х соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания СВХ примет значение из интервала (12; 14)

Решение: по формуле , получим

Р (

Значения Ф(х) в таблице-приложении.

**Пример 6**: Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения Х подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15мм.

Решение: Математическое ожидание случайных ошибок равно 0, так как знак отклонений не учитывается, поэтому используем формулу

Задания для самостоятельного решения:

1. Известны математическое ожидание а=10 и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной СВХ, равное 4. Найти вероятность того, что в результате испытания эта величина попадет в интервал (2; 13)
2. Известны математическое ожидание а=8 и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной СВХ, равное 1. Найти вероятность того, что в результате испытания эта величина попадет в интервал (4; 9)
3. Завод выпускает детали, стандартная длина которых 15мм. Рассмотрим длину детали как случайную величину Х, распределенную по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 2. Определить вероятность того, что длина наудачу выбранной детали будет больше 7, но меньше 9. Найти вероятность отклонения длины детали от стандартного размера не больше, чем на 3мм.
4. Завод выпускает детали, стандартная длина которых 65 мм. Рассмотрим длину детали как случайную величину Х, распределенную по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 8. Определить вероятность того, что длина наудачу выбранной детали будет больше 30, но меньше 70. Найти вероятность отклонения длины детали от стандартного размера не больше, чем на 4мм.
5. Задана функция распределения

Найти функцию плотности распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить графики.

Решение:

M(x)=

D(x) =

