**Случайные величины (**по методичке рассмотреть дискретную СВ до непрерывной СВ стр 13 - 17)

 **Случайная величина** (С.В.) – это величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает какое-либо числовое значение, заранее неизвестное (обозначается X, Y, Z,…)

1. **Случайная величина** может быть дискретной, то есть принимать изолированные значения (конечное и бесконечное множества).

***Пример 1***. Количество студентов на лекции (количество студентов, не явившихся на занятие).

***Пример 2***. Количество солнечных дней в году.

***Пример 3***. Количество простых чисел.

 **Законом распределения СВ** называют зависимость между возможными значениями СВ и вероятностями их появления.

 Распределение, заданное в виде таблицы называют **рядом** **распределения**.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | x1 | x2 | … | xk |
| Р | p1 | p2 | … | pk |

$$\sum\_{i=1}^{k}p\_{i}=1$$

Ломаная линия (график закона распределения) называется многоугольником распределения.

**Функция F(x),** равная вероятности того, что СВХ примет значение меньше заданного числа х называется функцией распределения случайной величины. $F\left(x\right)=P\left(X<x\right).$

Основные законы распределения дискретной СВ.

1. **Биномиальный закон распределения**: пусть проводится серия из **n** независимых опытов, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью р и не появиться с вероятностью q=1-p . Случайная величина Х – число появлений события А в этой серии испытаний. Вероятность того, что Х примет значение m , вычисляется по формуле: $P\left(X=m\right)=C\_{n}^{m}p^{m}q^{n-m}$, где m=0,1,2…n
2. **Геометрическое распределение**: пусть проводится серия из **n** независимых опытов, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью р и не появиться с вероятностью q=1-p. Испытания прекращаются, как только событие А наступает. СВХ – число испытаний, проведенных до первого появления события А. Вероятность того, что Х примет значение m , вычисляют по формуле $P\left(X=m\right)=\left(1-p\right)^{m-1}\*p$ , где m= 1,2…n.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 3 | … | k | … |
| P | q | q\*p | q2\*p |  | qk-1\*p |  |

1. **Гипергеометрическое распределение**: пусть имеется партия из N изделий, среди которых M обладают некоторым свойством. Наугад выбирается n изделий. СВ Х – количество изделий в выборке, обладающих данным свойством. Вероятность того, что Х примет значение m, вычисляется по формуле $P\left(X=m\right)=\frac{C\_{M}^{m}C\_{N-M}^{n-m}}{C\_{N}^{n}}$
2. Распределение Пуассона (вероятность массовых редких событий): пусть производится серия из n независимых испытаний ( n достаточно велико), в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна р (р достаточно мало). Случайная величина Х – число появлений события А в этой серии испытаний. Вероятность того, что Х примет значение m, вычисляется по формуле $P\left(X=m\right)=\frac{ƛ^{m}}{m!}$ $e^{-ƛ}$, где ƛ= n\*p.

***Пример 4.*** Два баскетболиста сделали по два броска в кольцо. Вероятность попадания для первого равна 0,7, для второго – 0,8. Случайная величина Х – общее число попаданий в кольцо. Составить закон распределения случайной величины Х.

**Решение**. Попаданий в кольцо может быть 0, 1, 2, 3 и 4. Вероятность того, что Х примет значение 0 – это вероятность того, оба ни разу не попали в кольцо: Р(Х=0)=0,3\*0,3\*0,2\*0,2=0,0036.

Вероятность того, что Х примет значение 1 (один из баскетболистов попал в корзину один раз, другой не попал ни разу)

$Р\left(Х=1\right)=0,3^{2}\*С\_{2}^{1}\*0,8\*0,2+С\_{2}^{1}\*0,7\*0,3\*0,2^{2}=0,0456$.

Вероятность того, что Х примет значение 2 (попадут оба по одному разу или только один из них попадет два раза:

$Р\left(Х=2\right)=0,7^{2}\*0,2^{2}+0,3^{2}\*0,8^{2}+С\_{2}^{1}\*0,8\*0,2\*С\_{2}^{1}\*0,7\*0,3=0,2116$.

Вероятность того, что Х примет значение 3 (один попал два раза, а другой только один раз)

$$Р\left(Х=3\right)=0,7^{2}\*С\_{2}^{1}\*0,8\*0,2+0,8^{2}\*С\_{2}^{1}\*0,7\*0,3=0,4256$$

Вероятность того, что Х примет значение 4 (оба попадут по два раза)

$Р\left(Х=4\right)=0,7^{2}\*0,8^{2}=0,3136$.

Проверим правильность вычислений : 0,0036+0,0456+0,2116+0,4256= 1

Закон распределения СВХ имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Р | 0,0036 | 0,0456 | 0,2116 | 0,4256 | 0,3136 |

***Пример 5***. После удачного выстрела по мишени стрелку выдается новый патрон. Если стрелок промахнется, то ему больше не разрешают стрелять. Вероятность попадания стрелком при одном выстреле равна 0,8. Составить закон распределения СВХ – числа выданных патронов.

Решение. СВХ может принимать значения 1, 2, 3 , 4,… .Вероятность попадания при одном выстреле одинакова и испытания прекращаются, как только стрелок промахнется. Это геометрическое распределение.

 Р(Х=1)= 0,2-вероятность того, что стрелок промахнулся в первый же раз больше патронов не получит.

 Р(Х=2)= 0,8\*0,2 = 0,16 –вероятность того, что первый выстрел - попадание, второй - промах.

 Р(Х=3)= 0,8\*0,8\*0,2 = 0,128 (два попадания и промах)

 Р(Х=4) = 0,8\*0,8\*0,8\*0,2 = 0,1024

Закон распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
| Р | 0,2 | 0,16 | 0,128 | 0,1024 | … |

Контроль: сумма убывающей геометрической прогрессии равна $S=\frac{b\_{0}}{1-q}=\frac{0.2}{1-0.8}=1$.

Пример 6. Пусть дискретная СВХ задана законом распределения. Составить функцию распределения этой случайной величины.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 2 | 5 | 9 |
| Р | 0,3 | 0,1 | 0,6 |

Решение. Если х ≤ 2, то $F\left(x\right)=P\left(X<x\right)=P\left(X<2\right)=0$.

Если $2<x\leq 5, то F\left(x\right)=0.3$, так как это вероятность того, что Х будет меньше любого числа из данного промежутка, а такое число только одно Х=2.

Если $5<x\leq 9, то F\left(x\right)=0.4$. Действительно, здесь

$F\left(x\right)=P\left(X<9\right)=P\left(X=2\right)+P\left(X=5\right)=0.3+0.1=0.4$, так как события Х = 2 и Х = 5 несовместны.

 Если$ x>9, то P\left(X<x\right)=1 $ как вероятность достоверного события, то есть вероятность того, что Х примет значения меньше любого числа из интервала $\left(9; \infty \right)$.

Функция распределения примет вид: $F\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}0 x\leq 2,\\0.3 2<x\leq 5,\\0.4 5<x\leq 9,\\1 x>9\end{array}\right.$

 **Числовые характеристики дискретных СВ**

Закон распределения полностью характеризует СВ.

Но иногда выгоднее пользоваться числами, которые описывают СВ суммарно. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины.

 Одной из таких характеристик является **математическое ожидание.**

**Математическое ожидание**  дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | х1 | х2 | х3 | х4 |
| Р | р1 | р2 | р3 | р4 |

М(Х)=$\sum\_{i=0}^{4}x\_{i}p\_{i}=х\_{1}р\_{1}+х\_{2}р\_{2}+х\_{3}р\_{3}+х\_{4}р\_{4}$

Например:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 2 | 3 | 5 |
| Р | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

М(Х)= 2\*0,1+3\*0,6+5\*0,3= 0,2 +1,8 + 1,5 = 3,5

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

 Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна, то математическое ожидание числа появления события М(Х)= np.

Например: Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна 0,7. Найти математическое ожидание общего числа попаданий при 100 выстрелах. М(Х)= 0,7\*100= 70.

**Свойства М(Х):** а) М(С)= С, где С –постоянная;

 б) М(Сх) = С\*М(Х);

 в) М(Х+У) = М(Х) + М(У);

 г) М(ХУ) = М(Х) \* М(У).

Пример:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 |
| Р | 0,2 | 0,8 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| У | 0,5 | 3 |
| Р | 0,3 | 0,7 |

**Найти математическое ожидание** суммы и произведениядвумя способами:

Первый способ (составляем закон распределения)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х+У | 1+0,5 | 1+3 | 2+0,5 | 2+3 |
| Р | 0,2\*0,3 | 0,2\*0,7 | 0,8\*0,3 | 0,8\*0,7 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х+У | 1,5 | 2,5 | 4 | 5 |
| Р | 0,06 | 0,24 | 0,14 | 0,56 |

Контроль: 0,06 + 0,24 + 0,14 + 0,56 = 1

М(Х)= 1\*0,2 + 2\*0,8 =1,8 М(У) = 0,5\*0,3 +3\*0,7 = 2,25

М(Х+У) = 1,5\*0,06+2,5\*0,24+4\*0,14+5\*0,56= 4,05

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ХУ | 1\*0,5 | 1\*3 | 2\*0,5 | 2\*3 |
| Р | 0,2\*0,3 | 0,2\*0,7 | 0,8\*0,3 | 0,8\*0,7 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ХУ | 0,5 | 1 | 3 | 6 |
| Р | 0,06 | 0,24 | 0,14 | 0,56 |

М(ХУ) = 0,5\*0,06 + 1\*0,24 + 3\*0,14 + 6\*0,56 =4,05

Второй способ ( по свойствам):

М(Х+У) = М(Х) + М(У) = 1,8 +2,25 =4,05

М(ХУ) = М(Х) \* М(У) = 1,8 \* 2,25 = 4,05.

**Вывод:** Ряды распределения разные - математические ожидания оказались одинаковыми.

Отклонением СВХ от ее математического ожидания называют Х – М(Х).

**Дисперсией (рассеянием)** дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\left(X\right)=M\left[X-M\left(X\right)\right]^{2}=M\left(X^{2}\right)-\left[M\left(X\right)\right]^{2}$$

Пример:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 2 | 3 | 5 |
| Р | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

М(Х) = 2\*0,1 + 3\*0,6 + 5\*0,3 = 3,5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х2 | 4 | 9 | 25 |
| Р | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

М(Х2) = 4\*0,1 + 9\*0,6 +25\*0,3 = 13,3

D(X) = 13.3 – 3.52 = 1.05

Свойства дисперсии: 1) D(C) = 0

 2) D(CX) = C2D(X)

 3) D(X+Y) = D(X) + D(Y)

 4) D(C+X) = D(X)

 5) D(X-Y) = D(X) + D(Y).

**Среднее квадратическое отклонение**: $σ\left(Х\right)=\sqrt{D(X)}$

Пример:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | -5 | 2 | 3 | 4 |
| Р | 0,4 | 0,3 |  | 0,2 |

р3= ?

0,4 + 0,3 + р3 +0,2= 1, значит р3 =0,1

М(Х) = -2 + 0,6 + 0,3 +0,8 = -0,3

D(Х) = 25\*0,4 +4\*0,3 + 9\*0,1 + 16\*0,2 – (-0,3)2 = 15,3 – 0,09 =15,21

$$σ\left(Х\right)=\sqrt{15,21}=3,9$$

**Задачи для самостоятельного решения:**  1. Дан ряд распределения СВХ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х | х1 | х2 |
| Р | 0,1 | р2 |

 М(Х) = 3,9; D(У) = 0,09. Известно, что $х\_{1}<х\_{2}$.

Найти: р2, х1 и х2 (самостоятельно).

1. Монету бросают 3 раза. Составить ряд распределения СВ Х-количество выпадений «герба». Построить многоугольник распределения.
2. Дискретная СВ Х задана рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 3 | 6 | 8 |
| Р | 0,2 | 0,1 | 0,4 | ? |

Построить многоугольник распределения, функцию распределения, ее график, найти М(Х), D(Х) и среднее квадратическое отклонение.

**Пример функции** **распределения и ее график**:

$$F\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}0, при x\leq 1\\\frac{1}{6} , при 1<x\leq 2\\\frac{1}{3}, при 2<x\leq 3\\\frac{1}{2} , при 3<x\leq 4\\\frac{2}{3}, при 4<x\leq 5\\\frac{5}{6}, при 5<x\leq 6\\1, при x>6\end{array}\right.$$

График функции распределении должен выглядеть примерно так:

