Непрерывные случайные величины

 В отличие от [**дискретной случайной величины**](http://mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html), НСВ может принять **любое** [**действительное**](http://mathprofi.ru/mnozhestva.html) значение из некоторого промежутка ненулевой длины, что делает невозможным её представление в виде таблицы (т.к. действительных чисел[***несчётно много***](http://mathprofi.ru/mnozhestva.html)).

**Функция распределения** непрерывной случайной величины ** определяется точно так же, как и [**функция распределения ДСВ**](http://mathprofi.ru/funkcia_raspredeleniya_dsv.html):

 – вероятность того, что случайная величина ** примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем переменная , которая «пробегает» все значения от «минус» до «плюс» бесконечности. Таким образом, учитываются все значения, которые в принципе может принять произвольная случайная величина. С увеличением  функция распределения «накапливает» (суммирует) вероятности, а значит, является [***неубывающей***](http://mathprofi.ru/vozrastanie_ubyvanie_ekstremumy_funkcii.html) и изменяется в пределах . По этой причине её иногда называют интегральной функцией распределения.

**Важной особенностью** является тот факт, что функция распределения ЛЮБОЙ непрерывной случайной величины **всегда и всюду** [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html)! Часто её можно встретить в кусочном виде, например:

однако в точках «стыка» всё хорошо:


**и если там**[**разрыв**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html), то вы имеете дело с опечаткой или откровенной ошибкой!

При ручном построении чертежа целесообразно найти опорные точки; в нашем примере удобно взять:  и плавно провести карандашом кусочек [**параболы**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html):

Левый нижний луч следует прочертить жирно (чтобы он не сливался с осью), а правый верхний луч продолжить за остриё оси (т.к. график бесконечен). Также не забываем, что  **не может**[***убывать***](http://mathprofi.ru/vozrastanie_ubyvanie_ekstremumy_funkcii.html), и если вдруг окажется, что какой-то кусок графика идёт «сверху вниз», то ищите ошибку или опять же – имеет место опечатка.

Рассмотрим пару конкретных «икс»:

 – вероятность того, что случайная величина  примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем –1;

 – вероятность того, что случайная величина  примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем 4.

Вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого промежутка: отрезок ли  нам дан, полуинтервал  или интервал , соответствующую вероятность можно вычислить по единой формуле:



Например:
 – вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка . И точно такими же будут вероятности ;

 – вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка ;

 – вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала ;

и так далее.

На участках одинаковой длины результаты получились разными: . И возникает вопрос: как оценить эту «концентрацию» вероятностей на различных промежутках? – ведь функция распределения  характеризует накопление вероятностей по мере увеличения .

**функция ПЛОТНОСТИ распределения вероятностей**

или *дифференциальная* функция распределения. Она представляет собой [**производную**](http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html) функции распределения: .

***Примечание****: для дискретной случайной величины такой функции не существует*

В нашем примере:

То есть, всё очень просто – [**берём производную**](http://mathprofi.ru/kak_naiti_proizvodnuju.html) от каждого куска, и порядок.

Но настоящий порядок состоит в том, что [**несобственный интеграл**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html)от с [**пределами интегрирования от «минус» до «плюс» бесконечности**](http://mathprofi.ru/metody_reshenija_opredelennyh_i_nesobstvennyh_integralov.html):
 – **равен единице, и строго единице**. В противном случае перед нами **не** функция плотности, и если эта функция найдена как производная, то  – **не** является функцией распределения *(несмотря на какие бы то ни было другие признаки)*.

Проверим «подлинность» наших функций. Если случайная величина  принимает значения из *конечного* промежутка, то всё дело сводится к вычислению [**определённого интеграла**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html).


Совершенно понятно, что левый и правый интегралы равны нулю и нам осталось вычислить:
.

С вероятностной точки зрения это означает, что случайная величина  [**достоверно**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) примет одно из значений отрезка . Геометрически же это означает, что [**площадь**](http://mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html) между осью  и графиком  равна единице, в данном случае речь идёт о площади треугольника .  Сторона  является фрагментом [**прямой**](http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html)  и для её построения достаточно найти точку :


Где большая площадь, там и более вероятные значения. Так как функция плотности «собирает под собой» вероятности, то она тоже [***неотрицательна***](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html)  и её график не может располагаться ниже оси . Следует также отметить, что в общем случае эта функция разрывна (следим, где «жирные» точки!).

Теперь разберём весьма любопытный факт: поскольку действительных чисел [***несчётно много***](http://mathprofi.ru/mnozhestva.html), то вероятность того, что случайная величина  примет какое-то конкретное значение стремится к нулю. И поэтому вероятности рассчитывают не для отдельно взятых точек, а для целых промежутков (пусть даже очень малых).
 (синяя [***площадь***](http://mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html) на чертеже)  – вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка ;

 (красная площадь) – вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка .

По той причине, что отдельно взятые значения можно не принимать во внимание, с помощью этих же интегралов рассчитываются и вероятности по интервалам / полуинтервалам, в частности:


Этим же объяснятся аналогичная «вольность» с функцией **.

Возможно, кто-то спросит: а зачем считать интегралы, если есть функция **?

А дело в том, что во многих задачах непрерывная случайная величина ИЗНАЧАЛЬНО задана функцией  плотности распределения, которая ТОЖЕ однозначно определяет случайную величину. Но, как вариант, можно сначала найти функцию  (с помощью тех же интегралов), после чего использовать «лёгкий способ»  отыскания вероятностей.

Пример 1

Непрерывная случайная величина  задана своей функцией распределения:


Найти значения  и функцию . Проверить, что  действительно является функцией плотности распределения. Вычислить вероятности . Построить графики .

 ***Решение***: в силу непрерывности функции распределения:
**
Таким образом:
**

Контроль: 

Найдём функцию плотности распределения:
**

Покажем, что ** действительно является функцией плотности:
1) Для любого значения **, в частности, на среднем промежутке: **
**Внимание!** Без 1-го пункта обойтись нельзя!
2) **
Таким образом, найденная функция действительно является функцией плотности распределения.

Требуемые вероятности выгоднее вычислить с помощью функции распределения:
** – вероятность того, что случайная величина примет значение из полуинтервала **;
**
**  – вероятность того, что случайная величина примет значение, больше, чем **.

Построим графики **:
**

Пример 2

Непрерывная случайная величина  задана функцией плотности распределения:


Найти значение  и составить функцию распределения вероятностей. Вычислить . Построить графики .

**Решение**: Найдём константу . Используем свойство . В данном случае:

На практике нулевые интегралы можно опускать, а константу сразу выносить за знак интеграла:

Пользуясь [**чётностью подынтегральной функции**](http://mathprofi.ru/metody_reshenija_opredelennyh_i_nesobstvennyh_integralov.html), вычислим:
 и подставим результат в уравнение:
, откуда выразим 

Таким образом, функция плотности распределения:


Выполним проверку, а именно, вычислим тот же самый интеграл, но уже с известной константой. , что и требовалось проверить.

Функция распределения вероятностей – есть интеграл:


Так как наша  состоит из трёх кусков, то решение разобьётся на 3 шага:

1) На промежутке , поэтому:


2) На интервале , и мы прицепляем следующий вагончик:


При подстановке верхнего предела интегрирования можно считать, что вместо «икс» мы подставляем «икс». Если же возник вопрос с пределом нижним, то вспоминаем [**график синусоиды**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) или нечётность синуса  с [**тригонометрической таблицей**](http://mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf).

3) И, наконец, на ,


Пример 3

Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины :


Требуется:
1) определить коэффициент ;
2) найти функцию распределения ;
3) построить графики ;
4) найти вероятность того, что  примет значение из промежутка .

 ***Решение***:
1) По свойству функции плотности распределения:
**
В данной задаче:
**
Таким образом, искомая плотность:
**

2) Функцию распределения найдём с помощью формулы **:
– если ** то ** и **;
– если ** то ** и **;
– если ** то ** и:
**.
Таким образом:
**

3) Выполним чертежи:
**
4) Найдём вероятность того, что случайная величина ** примет значение из промежутка **:
**

Пример 4

Непрерывная случайная величина  задана плотностью распределения вероятностей:


Найти значение  и построить график плотности распределения. Найти функцию распределения вероятностей  и построить её график. Вычислить вероятность .

***Решение***: функция плотности распределения вероятности обладает свойством **. В данном случае:
**
Таким образом, функция плотности распределения:
**
Выполним чертеж:
**
Составим функцию распределения вероятностей **:
1) Если **, то ** и **
2) Если **, то ** и  **
3) Если **, то ** и:
**
4) Если **, то ** и:
**
Таким образом:
**,
Выполним чертеж:
**
Вычислим **

Пример 5

Непрерывная случайная величина  задана своей плотностью распределения:


Найти коэффициент  и функцию распределения . Построить графики.

**Решение**: по свойству функции плотности распределения:


В данной задаче  состоит из 2 частей, поэтому:


Правый интеграл равен нулю, а вот левый – есть «живой» [**несобственный интеграл**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html) с [**бесконечным нижним пределом**](http://mathprofi.ru/metody_reshenija_opredelennyh_i_nesobstvennyh_integralov.html):


Таким образом, наше уравнение превратилось в готовый результат:


и функция плотности:


Функция , отыскивается в 2 шага:

1) На промежутке , следовательно:


2) На интервале  
, что и должно получиться.

Для построения графиков найдём пару опорных точек:  и аккуратно прочертим кусочки экспонент с причитающимися дополнениями:

Заметьте, что теоретически случайная величина  может принять сколь угодно большое[***по модулю***](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) отрицательное значение, и ось абсцисс является [**горизонтальной асимптотой**](http://mathprofi.ru/asimptoty_grafika_funkcii.html) для обоих графиков при .

Свойства F(x):

1. Если x1< x2, то F(x1) ≤ F(x2);
2. F(-∞) = 0;
3. F(∞) = 1;
4. P(a < x < b) = F(b) – F(a);
5. Вероятность того, что непрерывная СВ примет одно определённое значение, равна 0, т.е. P(Х=x0) = 0.

Часто непрерывная СВ задаётся дифференциальной функцией распределения или *плотностью распределения вероятностей*:

 f(x) = F′(x)

Свойства f(x):

1. ;
2. ;
3. .

Математическое ожидание непрерывной случайной величины равно 
Дисперсия непрерывной случайной величины есть 
Все [свойства математического ожидания и дисперсии](https://math.semestr.ru/math/expectation-continuous.php), сформулированные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных случайных величин.

**ПРИМЕР №1**. Случайная величина Х задана функцией распределения F(x):

Найдем плотность распределения f(x), как производную от функции распределения F(x):
f(x) = dF(x)/dx = 1/4
**Математическое ожидание**.


**Дисперсия**.


**Среднеквадратическое отклонение**.


**Задачи для самостоятельного решения:**

1. Плотность распределения непрерывной случайной величины *X* имеет вид



где *a* - параметр.
Для непрерывной случайной величины *X* найти: а) значение параметра *a*, при котором *f(x)* является плотностью распределения случайной величины *X*; б) функцию распределения *F*(x); в) математическое ожидание *Mx* и дисперсию *Dx*; г) P{X≥1,5}.
Построить графики функции распределения *F*(x) и плотности распределения *f*(x).

1. Случайная величина Х задана функцией распределения. Найти: вероятность попадания случайной величины в интервал ($\frac{1}{3};\frac{2}{3})$; плотность распределения вероятностей СВХ; математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить графики.

$$F\left(х\right)=\left\{\begin{array}{c}0 при x\leq -1\\\frac{1}{4}\left(x+1\right)^{2} при -1<x\leq 1\\1 при x>1\end{array}\right.$$