**Понятие числовой последовательности**

 Последовательность – это когда что-то расположено за чем-то. Например, последовательность действий, последовательность времён года, *члены последовательности* располагаются **строго в определённом порядке**. Так, если  двух человек в очереди поменять местами, то это уже будет **другая** последовательность. Каждому *члену последовательности* можно присвоить порядковый номер: 1,2, 3, 4, …, n

 Числовая последовательность – функция, заданная на множестве натуральных чисел. f(n) = an

 Пусть **каждому** натуральному значению  n  **по некоторому правилу** поставлено в соответствие действительное число  xn. Тогда говорят, что задана числовая последовательность  .

В математических задачах в отличие от жизненных ситуаций последовательность почти всегда содержит бесконечно много чисел.

При этом:
 называют первым членом последовательности;
 – вторым членом последовательности;
 – третьим членом последовательности;
…
 – энным или **общим членом** последовательности;
…

На практике последовательность обычно задаётся формулой общего члена, например:

 – последовательность положительных чётных чисел:


Таким образом, запись  однозначно определяет все члены последовательности – это и есть то правило (формула), по которому натуральным значениям  в соответствие ставятся числа . Поэтому последовательность часто коротко обозначают общим членом, причём вместо «икс» могут использоваться другие латинские буквы, например:

Последовательность положительных нечётных чисел :


Ещё одна распространённая последовательность :


 Переменная «эн» играет роль своеобразного счётчика.

На самом деле с числовыми последовательностями вы имели дело ещё в средних классах школы. Вспомним арифметическую прогрессию. Пусть  – первый член, а  –разность или  шаг арифметической прогрессии. Тогда:
 – второй член данной прогрессии;
 – третий член данной прогрессии;
 – четвертый;
 – пятый;
…
И, очевидно, энный член задаётся рекуррентной формулой 

**Примечание**: в рекуррентной формуле каждый следующий член выражается через предыдущий член или даже через целое множество предыдущих членов.

Полученная формула малопригодна на практике – чтобы добраться, скажем, до , нужно перебрать все предыдущие члены. И в математике выведено более удобное выражение энного члена арифметической прогрессии: . В нашем случае:


Подставьте в формулу  натуральные номера  и проверьте правильность построенной выше числовой последовательности.

Последовательность  на математическом жаргоне называют «мигалкой»:


 Таким образом, **члены последовательности могут повторяться**. Так, в рассмотренном примере последовательность состоит из двух бесконечно чередующихся чисел.

Бывает так, что последовательность состоит из одинаковых чисел. Например,  задаёт бесконечное количество «троек». Для эстетов есть случай, когда в формуле всё же формально фигурирует «эн»: 

Рассмотрим последовательность  .

Сначала подставим в энный член значение  и внимательно проведём вычисления:


Далее подставим в общий член :


Потом подставим следующий номер :


Четвёрку:




и так далее…**.**

### ****Понятие предела последовательности. Простейшие примеры****

Рассмотрим последовательность: :


Что происходит, когда «эн» увеличивается до бесконечности? Очевидно, что члены последовательности будут бесконечно близко приближаться к нулю. Это и есть предел данной последовательности, который записывается следующим образом:


Если предел последовательности равен нулю, то её называют [**бесконечно малой**](http://mathprofi.ru/beskonechno_malye_funkcii_zamechatelnye_ekvivalentnosti.html).

В теории математического анализа даётся [**строгое определение предела последовательности**](http://mathprofi.ru/predely_po_koshi.html) через так называемую эпсилон-окрестность.

Изобразим на числовой прямой члены последовательности  и симметричную относительно нуля (предела) -окрестность:

 Теперь зажмите синюю окрестность рёбрами ладоней и начинайте её уменьшать, стягивая к пределу (красной точке). Число  является пределом последовательности, если ДЛЯ ЛЮБОЙ заранее выбранной -окрестности  (сколь угодно малой) внутри неё окажется бесконечно много членов последовательности, а ВНЕ неё – лишь конечное число членов (либо вообще ни одного). То есть эпсилон-окрестность может быть микроскопической, да и того меньше, но «бесконечный хвост» последовательности рано или поздно обязан полностью зайти в данную окрестность.

Если у последовательности  **существует конечный предел**  А, то она называется **сходящейся** (в частности, **бесконечно малой** при А=0). В противном случае – **расходящейся**, при этом возможны два варианта: либо предела вовсе не существует, либо он бесконечен. В последнем случае последовательность называют **бесконечно большой**. Последовательности  являются бесконечно большими, поскольку их члены уверенным ходом продвигаются к «плюс бесконечности»:


Арифметическая прогрессия с первым членом  и шагом  тоже бесконечно великa:




$\lim\_{х\to \infty }\frac{2х^{2}-3х-5}{1+х+3х^{2}}=\left(\frac{\infty }{\infty }\right)$=

Выражение $\left(\frac{\infty }{\infty }\right)$ называется **неопределенностью, которую нужно раскрывать.**

 Нужно запомнить, как можно преобразовать функцию таким образом, чтобы неопределенность ушла. В нашем случае разделим числитель и знаменатель на ***х*** в старшей степени. Что получится?



Для раскрытия неопределенностей типа ***бесконечность/бесконечность*** делим числитель и знаменатель на***х*** в высшей степени.

### Еще один вид неопределенностей: 0/0

В таких случаях рекомендуется раскладывать числитель и знаменатель на множители. Вычислить предел:

$\lim\_{х\to -1}\frac{2х^{2}-3х-5}{1+х}=\left(\frac{0}{0}\right)$=?

Подстановка в функцию значения ***х = -1*** дает ***0*** в числителе и знаменателе. В числителе у нас квадратное уравнение. Найдем корни и запишем:



Сократим и получим: $\lim\_{х\to -1}\left(2х-5\right)=-7$

**Итак, если Вы сталкиваетесь с неопределенностью типа *0/0* – раскладывайте числитель и знаменатель на множители.**

Пример 5

Найти предел последовательности


**Решение** оформим по той же схеме:


(1) Используя [**свойства степеней**](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf), вынесем из показателей всё лишнее, оставив там только «эн».

(2) Смотрим, какие показательные последовательности есть в пределе:  и выбираем последовательность с **наибольшим** основанием: . В целях устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на .

(3) В числителе и знаменателе проводим почленное деление. Поскольку  является бесконечно убывающей геометрической прогрессией , то она стремится к нулю. И тем более к нулю стремится константа, делённая на растущую прогрессию: .

## Правило Лопиталя в пределах

**Еще один мощный способ, позволяющий устранить неопределенности обоих типов. В чем суть метода?**

**Если в пределе есть *неопределенность,* берем производную от числителя и знаменателя до тех пор, пока неопределенность не исчезнет*.***

Наглядно правило Лопиталя выглядит так:



**Важный момент**: предел, в котором вместо числителя и знаменателя стоят производные от числителя и знаменателя, должен существовать.



Налицо типичная неопределенность ***0/0***. Возьмем производные от числителя и знаменат



$\left(x^{5}\right)^{'}=5x^{4}$

Y= 6x4 → y’=6\*4x3= 24 x3

Y= 7x3 – 5x2 + 4x +17 → y’= 21x2 - 10x + 4\*1 + 0 = 21x2 -10x + 4

$$\left(x^{3}∙\sin(x)\right)^{'}=\left(x^{3}\right)^{'}∙\sin(x)+x^{3}∙\left(\sin(x)\right)^{'}=3x^{2}∙\sin(x)+x^{3}∙\cos(x)$$

$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^{'}=\frac{\left(\sin(x)\right)^{'}∙\cos(x)-\sin(x)∙\left(\cos(x)\right)^{'}}{\left(\cos(x)\right)^{2}}=\frac{\cos(x)∙\cos(x)-\sin(x)∙\left(-\sin(x)\right)}{cos^{2}x}= \frac{1}{cos^{2}x}$=$\left(tgx\right)^{'}$



$$tg∝=\frac{NL}{KN}=\frac{∆y}{∆x} \rightarrow tgφ=k при ∆x\rightarrow 0$$

**Геометрический смысл производной – производная, вычисленная в заданной точке, – это угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в данной точке.**

$у^{'}\left(x\_{0}\right)=k\_{касат.}$**=**$tgφ$

**(Механический смысл производной)**

Пусть задан путь s=f(x) движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t:

v(t)=s′(t)

**Задание.** Тело движется прямолинейно по закону s(t)= $\frac{2}{3}t^{3}-2t^{2}+4t$ (м). Определить скорость его движения в момент t=10 с.

**Решение.** Искомая скорость - это производная от пути, то есть

v(t)=s′(t)= $\frac{2}{3}∙3t^{2}-2∙2t+4∙1=2t^{2}-4t+4$

В заданный момент времени

v(10)=2⋅$10^{2}$−4⋅10+4=200−40+4=164 (м/с).

**Ответ.** v(10)= 164 (м/с).



K= -2 → y’(x0)= -2 → y = -2→ таких точек 5. (ищем точки, в которых функция равна -2)



**Задание.** На рисунке №1 изображен график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найти значение f′(x0).

**Решение.** Из геометрического смысла производной получаем, что

f′(x0)=tgα

Найдем угол α. Рассмотрим треугольник AOB - прямоугольный, равнобедренный. Тогда

∠AOB=45$°$,

 а значит

α=180$°$−45$°$=135$°$

А отсюда следует, что

f′(x0)=tg135$°$=−1

**Ответ.**

f′(x0)=−1

Найти производную функции 

 Первое действие, которое всегда выполняется при нахождении производной, состоит в том, что мы заключаем в скобки всё выражение и ставим штрих справа вверху.

Обратите внимание, что для дифференцирования все корни, степени нужно представить в виде , а если они находятся в знаменателе, то переместить их вверх.

Теперь вспоминаем о первом правиле дифференцирования – постоянные множители (числа) выносим за знак производной.

Обычно в ходе решения эти два правила применяют одновременно (чтобы не переписывать лишний раз длинное выражение).

Все функции, находящиеся под штрихами, являются элементарными табличными функциями, с помощью таблицы осуществляем превращение:



Можно всё оставить в таком виде, так как штрихов больше нет, и производная найдена. Тем не менее, подобные выражения обычно упрощают:



**Производная произведения функций**

$$\left(u∙v\right)^{'}=u^{'}v+uv^{'}$$

Пример 5

Найти производную функции 

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от .
Сначала применяем наше правило, а затем превращаем функции по таблице производных:



Пример 6

Найти производную функции 

**СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения.

Для скобки  используем два первых правила.

В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только элементарные функции, по таблице производных превращаем их в другие функции:



**Производная частного функций**

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{'}=\frac{u^{'}v-uv^{'}}{v^{2}}$$

Пример 8 Найти производную функции: $y=\frac{3x-4}{x^{2}+1}$

Решение: $y^{'}=\frac{\left(3x-4\right)^{'}∙\left(x^{2}+1\right)-\left(3x-4\right)∙\left(x^{2}+1\right)^{'}}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}=\frac{3\left(x^{2}+1\right)-\left(3x-4\right)∙2x}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}=\frac{3x^{2}+3-6x^{2}+8x}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}=\frac{3+8x-3x^{2}}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}$.

**Исследуем функцию с помощью производных:** $у=\frac{х^{3}}{х^{2}-1}$

1. Область определения функции (какие значения может принимать х?)

Х2 – 1 не должно равняться 0??? Значит х не должен быть равен +1 и -1, то есть $х\in \left(-\infty ; -1\right)∪\left(-1; +1\right)∪\left(+1; +\infty \right)$.

х = +1 и х = -1 – точки разрыва.

1. Функция разрывна.
2. Функция нечетна (при смене знака х, у тоже меняет свой знак (числитель!). Значит график симметричен началу координат.
3. Нули функции: у=0 при х=0.
4. Найдем первую производную функции (производная дроби):

 $y^{'}=\left(\frac{x^{3}}{x^{2}-1}\right)^{'}=\frac{\left(x^{3}\right)^{'}\left(x^{2}-1\right)-x^{3}\left(x^{2}-1\right)^{'}}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$ =$\frac{3x^{2}\left(x^{2}-1\right)-x^{3}∙2x}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}=\frac{3x^{4}-3x^{2}-2x^{4}}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}=\frac{x^{4}-3x^{2}}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$ . Приравняем производную к 0 $х^{4}-3х^{2}=х^{2}\left(х^{2}-3\right)=0, $значит х=0, или $х=\pm \sqrt{3}$ - это критические точки первого порядка.

 Определим знак производной в каждом интервале (с учетом точек разрыва):

При $х<-\sqrt{3, } у^{'}>0,$ значит функция возрастает;

при $-\sqrt{3}<х<-1, y'<0$, значит функция убывает;

при $-1<x<0, y'<0$, значит функция убывает;

 $0<x<1, y'<0$, значит функция убывает;

при $1<x<\sqrt{3, }$ $y'<0$, значит функция убывает

$x>\sqrt{3}$ y’$>0,$ значит функция возрастает.

1. $х=-\sqrt{3}$- точка максимума функции

$х=\sqrt{3}-$ точка минимума функции.

$у\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2}-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=2,6$= уминимальное

$у\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^{3}}{\left(-\sqrt{3}\right)^{2}-1}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-2,6$= умаксимальное

1. Асимптоты графика функции: так как х = 1 и х = -1 точки разрыва, то уравнения х = 1 и х = -1 задают вертикальные асимптоты(прямые, к которым график неограниченно приближается).

Наклонные асимптоты задаются уравнением y = kx+b, где

$k=\lim\_{x\to \infty }\frac{y}{x}$ $b=\lim\_{x\to \infty }\left(y-kx\right)$

$$k=\lim\_{x\to \infty }\frac{\frac{x^{3}}{x^{2}-1}}{x}=\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{2}}{x^{2}-1}=1$$

$$b=\lim\_{x\to \infty }\left(\frac{x^{3}}{x^{2}-1}-x\right)=\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{3}-x^{3}+x}{x^{2}-1}=0$$

Уравнение наклонной асимптоты у =x



1. **Исследовать функцию и построить график**:

$$у=\frac{х^{3}+4}{х^{2}}$$

1. $х\in \left(-\infty ;0\right)∪\left(0; +\infty \right)$, х = 0 – точка разрыва, значит х = 0- вертикальная асимптота.
2. $k=\lim\_{x\to \infty }\frac{y}{x}=\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{3}+4}{x^{3}}$= $\left(\frac{\infty }{\infty }\right)=1$

$b=\lim\_{x\to \infty }\left(y-kx\right)=\lim\_{x\to \infty }\left(\frac{x^{3}+4}{x^{2}}-x\right)=\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{3}+4-x^{3}}{x^{2}}=0$. Значит у = х – наклонная асимптота.

1. $у=0$, при х3+4 = 0. $х=\sqrt[3]{-4}$ = - 1,6
2. $Функция не является четной и не является нечетной.$
3. $y^{'}=\left(\frac{х^{3}+4}{х^{2}}\right)^{'}=\frac{\left(x^{3}+4\right)^{'}x^{2}-\left(x^{3}+4\right)\left(x^{2}\right)^{'}}{x^{4}}=\frac{3x^{2}∙x^{2}-\left(x^{3}+4\right)2x}{x^{4}}=\frac{3x^{4}-2x^{4}-8x}{x^{4}}=\frac{x^{3}-8}{x^{3}}$

$y^{'}=0, x^{3}-8=0 \rightarrow x=2$ - критическая точка и не забываем точку разрыва х = 0.

При $х<0, у'>0$ → функция возрастает;

 $при 0<x<2, y^{'}<0$ → функция убывает;

при $x>2, y'>0$ → функция возрастает.

При х = 2 функция имеет минимум. у(2)= (23+4)/22 =12/4 =3, график имеет вид:



1. Записать первые пять членов последовательности, определить убывает или возрастает последовательность

a) $ c\_{n}= \frac{3}{n}$ 3; 3/2; 3/3; 3/4; 3/5 …

 Последовательность убывающая; все числа меньше 3, значит последовательность ограничена сверху; все числа больше 0, значит последовательность ограничена снизу, т.е. $0<\frac{3}{n}\leq 3$ (просто ограничена). $\lim\_{n\to \infty }\frac{3}{n}=0$

 b) $d\_{n}=-\frac{5n}{n+1}$ -5/2; -10/3; -15/4; - 20/5; -25/6 …

$$\lim\_{n\to \infty }\frac{-5n}{n+1}=\lim\_{n\to \infty }\frac{-5\left(n+1\right)+5}{n+1}=\lim\_{n\to \infty }\left(-5+\frac{5}{n+1}\right)=-5$$

$$-5<d\_{n}\leq -\frac{5}{2}$$

 с) аn = n 1; 2; 3; 4; 5 … $a\_{n}>1$ - последовательность ограничена снизу. $\lim\_{n\to \infty }a\_{n}=\infty $

1. Вычислить пределы:

а)$\lim\_{х\to 3}\frac{2х^{2}-7х+3}{3х^{2}-10х+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\_{х\to 3}\frac{\left(х-3\right)\left(2х-1\right)}{\left(х-3\right)\left(3х-1\right)}$=$\lim\_{х\to 3}\frac{2х-1}{3х-1}$= 5/8

$2х^{2}-7х+3=0$ D= (-7)2 – 4\*2\*3= 25

$$ $$

$x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}=\frac{7\pm 5}{4}=3; \frac{1}{2}$

$$2х^{2}-7х+3=2\left(x-3\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-3\right)\left(2x-1\right)$$

$3x^{2}-10x+3=0$ D=(-10)2- 4\*3\*3= 64

$x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}=\frac{10\pm 8}{6}=3; \frac{1}{3}$

$$3х^{2}-10х+3=3\left(x-3\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\left(x-3\right)\left(3x-1\right)$$

 b) или по правилу Лопиталя:

$$\lim\_{х\to 3}\frac{2х^{2}-7х+3}{3х^{2}-10х+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\_{x\to 3}\frac{\left(2х^{2}-7х+3\right)^{'}}{\left(3х^{2}-10х+3\right)^{'}}=\lim\_{x\to 3}\frac{4x-7}{6x-10}=\frac{4\*3-7}{6\*3-10}=\frac{5}{8}$$

c) $\lim\_{x\to 1}\frac{x^{3}-x^{2}-x+1}{x^{3}-3x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\_{x\to 1}\frac{\left(x^{3}-x^{2}-x+1\right)^{'}}{\left(x^{3}-3x+2\right)^{'}}=\lim\_{x\to 1}\frac{3x^{2}-2x-1}{3x^{2}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\_{x\to 1}\frac{\left(3x^{2}-2x-1\right)^{'}}{\left(3x^{2}-3\right)^{'}}=\lim\_{x\to 1}\frac{6x-2}{6x}$=$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

1. Найти производные функций и вычислить в заданной точке:
2. Y= 3x5- 4x3+2x-17 x=-2

Y’= 15x4 – 12x2 + 2 – 0 y’(-2)= 15(-2)4 -12(-2)2 + 2= 15\*16 – 12\*4 +2= 240 – 48 +2 = 194

1. Y= (3x2 – 12)(9x + x3 ) x0 = -1

$$y^{'}=\left(3x^{2}-12\right)^{'}\left(9x+x^{3}\right)+\left(3x^{2}-12\right)\left(9x+x^{3}\right)^{'}=6x\left(9x+x^{3}\right)+\left(3x^{2}-12\right)\left(9+3x^{2}\right)$$

$$y^{'}(-1)=-6\left(-9-1\right)+\left(3-12\right)\left(9+3\right)=60-9\*12=-48$$

1. a)Точка движется по траектории S(t) = 2t2 +4t – 7, в какой момент времени скорость движения будет равна v0 =8 м/с.

V=S’ = (2t2 + 4t – 7)’= 4t + 4 = 8; 4t = 8-4 = 4, t = 1 (c)

1. Точка движется по траектории S(t) = 2t3 - 4t2 + 7t, чему будет равна скорость точки при t0 = 2c.

V(t0)=?

V=S’ = (2t3 - 4t2 + 7t)’= 6t2 -8t + 7

V(2) = 6\*4 – 8\*2 + 7 = 24 – 16 + 7 = 15

1. Касательная к некоторой кривой параллельна прямой у = -5х+3. Чему равна производная функции в точке касания?

Так как касательная и прямая параллельны, то их угловые коэффициенты равны кпр = ккас = - 5 – это и есть производная функции, вычисленная в точке касания, т.е. у’(x0) = - 5.

 **Задания для самостоятельной работы**

1. **Записать** первые пять членов последовательности, определить убывает или возрастает последовательность

а) $a\_{n}=\frac{3n-2}{2n-1}$ b) $b\_{n}=\frac{3n^{2}+5n}{6n}$

 2. **Вычислить** предел:

 a) $\lim\_{n\to \infty }\frac{3n-2}{2n-1}$ b) $\lim\_{x\to 1}\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}+x+4}$ c) $\lim\_{x\to -4}\frac{x^{2}+4x}{x^{2}-16}$

d) $\lim\_{x\to 4}\frac{x^{2}+4x}{x^{2}-16}$ e) $\lim\_{x\to \infty }\frac{3x^{2}-4x+2}{6x^{2}+2x-4}$

 3. **Найти** производные функций и вычислить в заданной точке:

 а) у = 5х7 +3х4 – 7х2 -32х + 18 при х = -1

 в) у = (х4 + 3х)(5 – х5) при х = 1

 4. **Найдите производную функции**.

а)  б) 

в)  г) 

*д)  е) *

*ж) * *з) *

 *и) *

к) у = (3x4 + 5x3+ 7x – 9)\* sin(x).

 5. **Записать** свойства функции по графику:



1. $х\in \left(-\infty ; \infty \right)$
2. $у\in \left[0;4\right]$
3. Функция непрерывна.
4. Функция периодическая: период Т=6.
5. Нули функции: у=0 при х=0 + 6k, где k-любое целое число.
6. $y\_{max}=4 при x=2+6k, k\in Z.$
7. $y\_{min}=0 при x=6k, k\in Z$
8. $y\_{возр} при x\in \left(6k;2+6k\right)$, $k\in Z$
9. $y\_{убыв. } при x\in \left(2+6k;6+6k\right), k\in Z$