НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Новосибирск
2007

Предисловие

Задачи любой науки состоят в выявлении и исследовании закономерностей, которым подчиняются реальные процессы.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях науки и техники: в теории надёжности, теории массового обслуживания, теоретической физике, геодезии, астрономии, теории ошибок, теории управления, теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит для обоснования математической статистики.

Математическая статистика – раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей. Методы математической статистики используются при планировании организации производства, анализе технологических процессов, для контроля качества продукции и многих других целей.

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, появились в XVI-XVII веках. Они принадлежали Д.Кардано, Б.Паскалю, П.Ферма, Х.Гюйгенс и др. и представляли попытки создания теории азартных игр с целью дать рекомендации игрокам. Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Я.Бернулли, который доказал теорему, теоретически обосновавшую накопленные ранее факты и названную в дальнейшем «законом больших чисел».

Дальнейшее развитие теории вероятностей приходится на XVII-XIX века благодаря работам А.Муавра, П.Лапласа, К.Гаусса, С.Пуассона и др. Весьма плодотворный период развития «математики случайного» связан с именами русских математиков П.Л.Чебышева, А.М.Ляпунова и А.А.Маркова.

Большой вклад в последующее развитие теории вероятностей и математической статистики внесли российские математики С.Н.Бернштейн, В.И.Романовский, А.Н.Колмогоров, А.Я.Хинчин, Б.В.Гнеденко и др., а также учёные англо-американской школы Стьюдент (псевдоним В.Госсета), Р.Фишер, Э.Пирсон, Е.Нейман и др. Особо следует отметить неоценимый вклад академика А.Н.Колмогорова в становление теории вероятностей как математической науки.

Широкому внедрению статистических методов исследования способствовало появление во второй половине XX века электронных вычислительных машин и, в частности, персональных компьютеров. Статистические программные пакеты сделали эти методы более доступными и наглядными, так как трудоёмкую работу по расчёту статистик, параметров, характеристик, построению таблиц и графиков в основном стал выполнять компьютер, а исследователю осталась главным образом творческая работа: постановка задачи, выбор методов решения и интерпретация результатов.

Теория вероятностей и математическая статистика

§1. Основы комбинаторики

Факториалом целого положительного числа n (обозначается $n!$) называется произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!$

Основное свойство факториала: $n! = n\cdot(n-1)!$.

Размещениями из n элементов по k называются такие соединения по k элементов, которые отличаются друг от друга самими элементами или их порядком. Число всех размещений из n различных элементов по k (обозначается A_n^k): $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Перестановками из n элементов называются их соединения, отличающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов. Число всех перестановок из n различных элементов (обозначается P_n): $P_n = n!$.

Если среди n элементов a, b, c,... имеются одинаковые (a повторяется α раз, b – β раз, с – γ раз и т.д.), то

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}.$$

Сочетаниями из n элементов по k называются их соединения, отличающиеся друг от друга только самими элементами. Число всех сочетаний из n различных элементов по k (обозначается C_n^k): $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Основное свойство сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Основной закон комбинаторики. Пусть нужно провести k действий, причём первое действие можно провести n_1 способами, второе – n_2 способами, ... , k-е – n_k способами. Тогда все действия можно провести $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ способами.

§2. Основные понятия теории вероятностей

Наблюдаемые события можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет при выполнении данного ряда условий.

Событие называется **невозможным**, если оно заведомо не произойдет при выполнении данного ряда условий.

Событие называется **случайным**, если при осуществлении ряда условий оно может либо произойти, либо не произойти.

Испытанием называется осуществление ряда условий.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называются **единственно возможными**, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.

Очевидно, единственно возможные события являются попарно несовместимыми.

События называются **равновозможными**, если можно считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другие.

Элементарным исходом называется каждый из возможных результатов испытания.

Полной группой называется совокупность единственно возможных событий испытания.

Противоположными называются два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое обозначают $\overline{A}$.

Суммой $A + B$ **двух событий** A и B называется событие, состоящее в появлении события А или события В, или обоих этих событий.

Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу всех элементарных исходов испытания, если все исходы равновозможны (**классическое определение вероятности**). Формулой это определяется так:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятных событию A; n – число всех возможных элементарных исходов.

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:

а) вероятность достоверного события равна единице;

б) вероятность невозможного события равна нулю;

в) вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей;

г) вероятность суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример. В ящике 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

Решение. Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев, благоприятствующих событию A, равно числу всех возможных случаев, т.е. $m=n=10$ и $P(A)=1$. В этом случае событие A достоверно.

Пример. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 чёрных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

Решение. Синих шаров в урне нет, т.е. $m=0$, а $n=15$. Следовательно, $P(A)=0/15=0$. В данном случае событие A – невозможное.

Пример. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 чёрных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны чёрный шар?

Решение. Здесь $m=4$, $n=12$ и $P(A)=4/12=1/3$.

Пример. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 чёрных. Вынули 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара – белые?

Решение. Здесь число всех случаев $n=C_{10}^2=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$. Число же случаев, благоприятствующих событию A, определяется равенством

$m = C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$ Итак, $P(A) = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}.$

Пример. В корзине 100 фруктов: 10 груш и 90 яблок. Наугад взяты четыре фрукта. Найти вероятность того, что

а) взято четыре яблока;

б) взято четыре груши.

Решение. Общее число элементарных исходов испытания равно числу сочетаний из 100 элементов по четыре, т.е. C_{100}^4.

а) Число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию (все взятые наугад четыре фрукта являются яблоками), равно числу сочетаний из 90 элементов по четыре, т.е. C_{90}^4.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов:

$$P = \frac{C_{90}^4}{C_{100}^4} = \frac{\dfrac{90!}{4! \cdot 86!}}{\dfrac{100!}{4! \cdot 96!}} = \frac{87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}{97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \approx 0,65 .$$

б) Число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию (все взятые наугад четыре фрукта – груши), равно числу способов, которыми можно извлечь четыре груши из десяти имеющихся, т.е. C_{10}^4.

Искомая вероятность

$$P = \frac{C_{10}^4}{C_{100}^4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} : \frac{100!}{4! \cdot 96!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \approx 0,00005 .$$

Пример. Из 10 ответов к задачам, помещённым на данной странице, 2 имеют опечатки. Студент решает 5 задач. Какова вероятность того, что в одной из них ответ дан с опечаткой.

Решение. $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

$$n = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252;$$

$$m = C_8^4 C_2^1 = \frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{2!}{1!\cdot 1!} = \frac{2\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 140;$$

$$P(A) = \frac{140}{252} = \frac{5}{9}.$$

Примечание. Такие задачи описываются общей схемой. Имеется совокупность из N_1 элементов первого вида и N_2 элементов второго вида. Какова вероятность того, что при выборе совокупности из k элементов она состоит из k_1 элементов первого вида и k_2 элементов второго вида, где $k = k_1 + k_2$, $k_1 \le N_1$, $k_2 \le N_2$.

$$P(A) = \frac{C_{N_1}^{k_1}\cdot C_{N_2}^{k_2}}{C_{N_1+N_2}^{k_1+k_2}}.$$

§3. Относительная частота события

Относительной частотой события называется отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом,

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появлений события; n – общее число испытаний, $W(A)$ – относительная частота события.

В тех случаях, когда классическое определение вероятности неприменимо (например, когда число исходов бесконечно), используется **статистическое определение**. В этом случае за вероятность события принимается относительная частота события.

§4. Геометрическое определение вероятности

При классическом определении вероятности не всегда можно определить числа m и n для вычисления вероятностей событий, и поэтому непосредственно пользоваться формулой $P(A)== m/n$ не удаётся. В таких случаях вводят понятие геометрической вероятности, т. е. вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т. д.).

Пусть, например, на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу в области G, попадет в область g. При этом выражению «точка, взятая наудачу в области G» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G. Вероятность попадания точки в какую-либо часть области g пропорциональна мере (*mes*) этой части (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$p = \frac{\text{mes}\, g}{\text{mes}\, G}$$

(геометрическое определение вероятности).

Пример. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу нанесена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что отрезки OB и BA имеют длину больше, чем $L/4$.

Решение. Разобьём отрезок OA на четыре равные части точками C, D, E (рис. 1). Требование задачи будет выполнено, если точка B попадёт на отрезок CE, длина которого равна $L/2$.

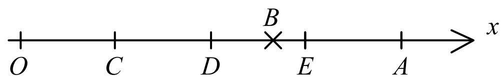


Рис. 1

Следовательно, $p = (L/2) / L = 1/2$.

Пример. Внутри эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ расположен круг $x^2 + y^2 = 9$. Найти вероятность попадания точки в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом.

Решение.

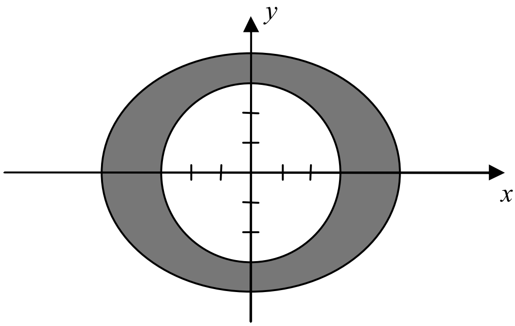


Рис. 2

Пусть событие A – попадание точки в кольцо. Тогда $P(A) = S_{кол} / S_{эл}$, где $S_{кол} = S_{эл} - S_{кр} = \pi ab - \pi r^2$. Так как $a = 5$, $b = 4$, $r = 3$, то

$$P(A) = \frac{20\pi - 9\pi}{20\pi} = \frac{11}{20} = 0,55.$$

Примечание. В случае классического определения вероятность невозможного события равна нулю. Справедливо и обратное утверждение, т.е. если вероятность события равна нулю, то событие невозможно. При геометрическом же определении вероятности обратное утверждение не имеет места. Вероятность попадания брошенной точки в одну определённую точку области G равна нулю, однако это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным.

Пример (Задача о встрече). Два студента A и B условились встретиться в определённом месте во время перерыва между 13 ч и 13 ч 50 мин. Пришедший первым ждёт другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 50 мин может произойти наудачу, и моменты прихода независимы?

Решение. Обозначим момент прихода студента A через x, а студента B – через y. Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \le 10.$ Изобразим x и y как декартовы координаты на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем одну минуту (рис. 2). Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной 50, а исходы, благоприятствующие встрече, – точками заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата: $p = \dfrac{50^2 - 40^2}{50^2} = 0,36.$

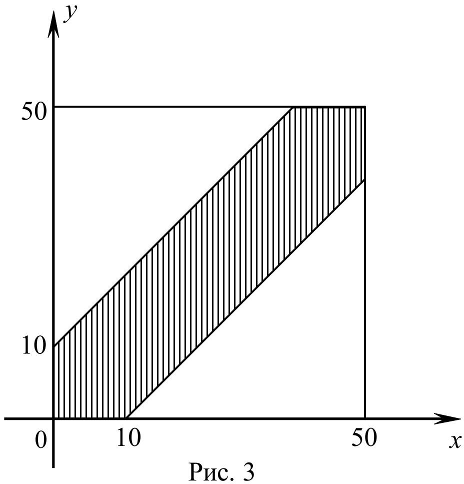


Рис. 3

§5. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Пусть Ω – множество всех возможных исходов некоторого испытания (опыта, эксперимента). Каждый элемент ω множества Ω, т.е. $\omega \in \Omega$, называют **элементарным событием** или **элементарным исходом**, а само множество Ω – **пространством элементарных событий**. Любое событие A рассматривается как некоторое подмножество (часть) множества Ω, т.е. $A \subseteq \Omega$.

Само пространство элементарных событий Ω представляет собой событие, происходящее всегда (при любом элементарном исходе ω), и называется **достоверным** событием. Таким образом, Ω выступает в двух качествах: множества всех элементарных исходов и достоверного события.

Ко всему пространству Ω элементарных событий добавляется ещё пустое множество Ø, рассматриваемое как событие и называемое **невозможным** событием.

Суммой нескольких событий A_1, A_2, …, A_n называется объединение множеств $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Произведением нескольких событий A_1, A_2, …, A_n называется пересечение множеств $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

Событием $\overline{A}$, противоположным событию A, называется дополнение множества A до Ω, т.е. $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют **полную группу** (**полную систему**), если их сумма представляет всё пространство элементарных событий, а сами события несовместные, т.е. $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i A_j = \varnothing \quad (i \neq j)$.

Таким образом, **под операциями над событиями понимаются операции над соответствующими множествами**.

В начале 30-х годов XX века академик А.Н.Колмогоров разработал подход, связывающий теорию вероятностей с современной метрической теорией функций и теорией множеств, который в настоящее время является общепринятым.

Сформулируем аксиомы теории вероятностей. Каждому событию A поставим в соответствие некоторое число, называемое **вероятностью события *A***, т.е. $P(A)$. Так как любое событие есть **множество**, то вероятность события есть **функция множества**.

Вероятность события должна удовлетворять следующим аксиомам:

Р.1. Вероятность любого события неотрицательна: $P(A) \geq 0$.

Р.2. Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega) = 1$.

Р.3. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если $A_i A_j = \varnothing \quad (i \neq j)$, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Из аксиом **Р.1, Р.2, Р.3** можно вывести основные **свойства** вероятностей:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(\varnothing) = 0$.

3. $0 \leq P(A) \leq 1$.

4. $P(A) \leq P(B)$, если $A \subseteq B$.

5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

6. $P(A+B) \le P(A)+P(B)$.

§6. Произведение событий

Условной вероятностью $P(B \mid A)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло.

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n \mid A_1A_2...A_{n-1}).$$

Два события A и B называются **независимыми**, если

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример. В первом ящике 2 белых и 10 чёрных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение. В данном случае речь идёт о совмещении событий A и B, где событие A – появление белого шара из первого ящика, событие B – появление белого шара из второго ящика. При этом A и B – независимые события. Имеем $P(A) = 2/12 = 1/6$, $P(B) = 8/12 = 2/3$. Применив теорему умножения вероятностей, находим

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = (1/6) \cdot (2/3) = 1/9.$$

Пример. В ящике 6 белых и 8 чёрных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Пусть событие A – появление белого шара при первом вынимании; событие B – появление белого шара при втором вынимании. По теореме умножения вероятностей для случая зависимых событий имеем

$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. Но $P(A) = 6/(6+8) = 6/14 = 3/7$ (вероятность появления первого белого шара); $P(B \mid A) = (6-1)/(8+6-1) = 5/13$ (вероятность появления второго белого шара в предположении, что первый белый шар уже вынут). Поэтому $P(AB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$.

Пример. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

Решение. $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,8$, $P(C) = 0,9$;

$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,75 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,54.$

Пример. Из колоды в 52 листа наугад вытягиваются три карты. Какова вероятность, что все три карты – тузы?

Решение. Интересующее нас событие (все три карты – тузы) является произведением трех событий: A – первая карта туз, B – вторая карта туз, C – третья карта туз. По теореме умножения $P(ABC) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB)$.

$P(A) = 4/52$ (число благоприятствующих исходов – число тузов в колоде, общее число элементарных исходов равно числу карт).

$P(B \mid A) = 3/51$ (число благоприятствующих исходов – число тузов, оставшихся после совершения события A, т.е. после того, как один туз был вынут из колоды; общее число исходов равно числу карт, оставшихся в колоде после того, как одну карту уже вынули).

Аналогично, $P(C \mid AB) = 2/50$.

Следовательно, $P(ABC) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5525} \approx 0,00018$.

Пример. Вероятность выхода станка из строя в течении одного рабочего дня равна α (α – малое положительное число, второй степенью которого можно пренебречь). Какова вероятность того, что за 5 дней станок ни разу не выйдет из строя? Решить задачу при $\alpha = 0,01$.

Решение. Так как $(1 - \alpha)$ – вероятность того, что станок не выйдет из строя в течение дня, то по теореме умножения вероятностей $(1 - \alpha)^5$ – вероятность того, что станок не выйдет из строя в течение 5 дней.

Воспользовавшись биномиальным разложением и пренебрегая членами, содержащими α^2, α^3, α^4 и α^5, получим приближённое равенство $(1-\alpha)^5 \approx 1-5\alpha$, т.е. $P \approx 1-5\alpha$. Приняв $\alpha = 0{,}01$, получаем $P \approx 0{,}95$.

§7. Сумма событий

Теорема. Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Теорема. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Теорема. Вероятность суммы **совместных** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример. В урне 10 белых, 15 чёрных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: белый; чёрный; синий; красный; белый или чёрный; синий или красный; белый, чёрный или синий.

Решение. Имеем $n = 10+15+20+25 = 70$, $P(\text{Б}) = 10/70 = 1/7$, $P(\text{Ч}) = 15/70 = 3/14$, $P(\text{С}) = 20/70 = 2/7$, $P(\text{К}) = 25/70 = 5/14$. Применив теорему сложения вероятностей, получим

$P(\text{Б}+\text{Ч}) = P(\text{Б}) + P(\text{Ч}) = 1/7 + 3/14 = 5/14$,

$P(\text{С}+\text{К}) = P(\text{С}) + P(\text{К}) = 2/7 + 5/14 = 9/14$,

$P(\text{Б}+\text{Ч}+\text{С}) = 1 - P(\text{К}) = 1 - 5/14 = 9/14$.

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе:

а) попадут в цель оба стрелка;

б) попадет хотя бы один.

Решение. Обозначим события: A – попадет в цель первый стрелок, B – попадет в цель второй стрелок.

а) Интересующее нас событие (попадут в цель оба стрелка) является произведением событий A и B. Так как A и B – независимые события (стрелок попадает или не попадает в цель независимо от меткости другого), то

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Следовательно, $P(AB) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

б) 1-й способ. Интересующее нас событие является суммой событий A и B, поэтому по теореме сложения

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

$P(A + B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}48 = 0{,}92$.

2-й способ. Событие C (попадет хотя бы один стрелок) и $\overline{C}$ (ни один из стрелков не попадет) – противоположные, поэтому $P(C) + P(\overline{C}) = 1$. Следовательно, $P(C) = 1 - P(\overline{C})$.

Событие $\overline{C}$ является произведением событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Таким образом $P(C) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}92$.

Пример. В первом ящике 2 белых и 10 чёрных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – чёрный.

Решение. Пусть: событие A – появление белого шара из первого ящика; событие B – появление белого шара из второго ящика; событие C – появление чёрного шара из первого ящика ($C = \overline{A}$); событие D – появление белого шара из второго ящика ($D = \overline{B}$). Тогда $P(A) = 1/6$, $P(B) = 2/3$,

$P(C) = P(\overline{A}) = 1 - 1/6 = 5/6, \quad P(D) = P(\overline{C}) = 1 - 2/3 = 1/3.$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика – чёрный:

$P(AD) = P(A) \cdot P(D) = (1/6) \cdot (1/3) = 1/18.$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, чёрный, а из второго ящика – белый:

$P(BC) = P(B) \cdot P(C) = (2/3) \cdot (5/6) = 5/9.$

Определим теперь вероятность того, что шар, вынутый из одного ящика (безразлично – из первого или второго), окажется белым, а шар, вынутый из другого ящика, – чёрным. Применяем теорему сложения вероятностей:

$P = P(AD) + P(BC) = 1/18 + 5/9 = 11/18.$

Пример. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что в цель попадёт хотя бы один стрелок.

Решение. Здесь $P(\overline{A}) = 1 - 0,75 = 0,25$ (вероятность промаха первого стрелка); $P(\overline{B}) = 1 - 0,8 = 0,2$ (вероятность промаха второго стрелка); $P(\overline{C}) = 1 - 0,9 = 0,1$ (вероятность промаха третьего стрелка); тогда $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ – вероятность одновременного промаха всех трёх стрелков – определится следующим образом:

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,005.$$

Но событие, противоположное событию $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$, заключается в поражении цели хотя бы одним стрелком. Следовательно, искомая вероятность $P = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$, т.е. $P = 1 - 0,005 = 0,995$.

§8. Формула полной вероятности

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу и называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)\, P(A \mid B_1) + P(B_2)\, P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n)\, P(A \mid B_n).$$

Пример. Студент знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае вероятность сдать экзамен больше: когда студент подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

Решение. Обозначим события: A – вытягивает выученный билет, подходя первым; B – вытягивает выученный билет, подходя вторым.

$P(A) = 10/25 = 0,4$ (число благоприятствующих исходов равно числу выученных билетов; число всех элементарных исходов равно числу билетов).

Событие B может наступить при появлении одного из двух несовместных событий C_1 (первый взятый билет был известен нашему студенту) и C_2 (первый взятый билет был невыученный билет). По формуле полной вероятности $P(B) = P(C_1) \cdot P(B \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(B \mid C_2)$.

$$P(B) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{240}{600} = 0{,}4\,.$$

Так как $P(A) = P(B) = 0{,}4$, то вероятность одинакова.

Пример. Имеются 4 урны. В первой урне 1 белый и 1 чёрный шар, во второй – 2 белых и 3 чёрных шара, в третьей – 3 белых и 5 чёрных шаров, в четвёртой – 4 белых и 7 чёрных шаров. Событие H_i – выбор i-той урны ($i = 1, 2, 3, 4$). Известно, что вероятность выбора i-той урны равна i / 10, т.е. $P(H_1) = 1/10$, $P(H_2) = 1/5$, $P(H_3) = 3/10$, $P(H_4) = 2/5$. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из неё шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Из условия следует, что $P(A \mid H_1) = 1 / 2$ (условная вероятность извлечения белого шара из первой урны); аналогично $P(A \mid H_2) = 2 / 5$, $P(A \mid H_3) = 3 / 8$, $P(A \mid H_1) = 4 / 11$. Вероятность извлечения белого шара находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) +$$

$$+P(H_4) \cdot P(A \mid H_4) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{1707}{4400}.$$

Пример. В первой урне 5 белых и 10 чёрных шаров, во второй – 3 белых и 7 чёрных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар – белый.

Решение. Обозначим события: A – вынули белый шар из первой урны после того, как в неё переложили шар из второй урны; B_1 – из второй урны в первую переложили белый шар; B_2 – из второй урны в первую переложили чёрный шар.

$P(B_1) = 3/10;\;\; P(B_2) = 7/10.$

Если из второй урны в первую переложили белый шар, то в первой урне стало 16 шаров, из них 6 белых, поэтому $P(A \mid B_1) = 6/16 = 3/8$.

Если переложили чёрный шар, то в первой урне стало 16 шаров, из них 5 белых, поэтому $P(A \mid B_2) = 5/16$.

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A\mid B_1)+P(B_2)\cdot P(A\mid B_2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{16}=\frac{53}{160}.$$

§9. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2,..., B_n$, образующих полную группу. Тогда условная вероятность любого события B_i ($i = 1, 2, ..., n$) при условии, что событие А уже произошло, вычисляется по **формуле Байеса**:

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)}{P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\ldots+P(B_n)P(A\mid B_n)}.$$

Пример. В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров, во второй – 5 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, после чего из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что из первой во вторую урну был переложен чёрный шар, если извлечённый из второй урны шар оказался белым?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что извлечённый шар из второй урны оказался белым, B_1 – из первой урны во вторую переложили белый шар, B_2 – чёрный. B_1 и B_2 – гипотезы.

$$P(B_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\quad P(B_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Найдём $P(A\mid B_1)$ и $P(A\mid B_2)$.

Если переложили белый шар, то во второй урне стало 10 шаров, из них 6 белых

$P(A\mid B_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, если чёрный, то шаров так же 10, но белых 5, тогда

$$P(A\mid B_2)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A\mid B_1)+P(B_2)\cdot P(A\mid B_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{27}{50}.$$

По формуле Байеса:

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{27}{50}} = \frac{5}{9}.$$

§10. Схема Бернулли

Испытания называются **независимыми относительно события *A***, если при нескольких испытаниях вероятность события A не зависит от исходов других испытаний.

Говорят, что испытания проводятся по схеме Бернулли, если для них выполняются следующие условия:

1) испытания независимы;

2) количество испытаний известно заранее;

3) в результате испытания может произойти только два исхода: «успех» или «неуспех»;

4) вероятность «успеха» в каждом испытании одна и та же.

Вероятность того, что при n испытаниях «успех» осуществится ровно k раз и, следовательно, «неуспех» $(n - k)$ раз, вычисляется по следующей формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k; p – вероятность «успеха»; q – вероятность «неуспеха» ($q = 1 - p$).

Данная формула называется **формулой Бернулли**.

Пример. В урне 20 белых и 10 чёрных шаров. Вынули подряд 4 шара, причём каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего, и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырёх вынутых шаров окажется два белых?

Решение. Вероятность извлечения белого шара $p = 20/30 = 2/3$ можно считать одной и той же во всех четырёх испытаниях; $q = 1 - p = 1/3$. Используя формулу Бернулли, получаем

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Пример. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не более трёх раз?

Решение. Здесь $p = 0,4$, $q = 0,6$. Имеем:

вероятность появления события A 0 раз: $P_{10}(0) = q^{10}$;

вероятность появления события A 1 раз: $P_{10}(1) = 10pq^9$;

вероятность появления события A 2 раза: $P_{10}(2) = 10p^2q^8$;

вероятность появления события A 3 раза: $P_{10}(3) = 10p^3q^7$.

Вероятность того, что событие A появится не больше трёх раз, составляет
$P = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3)$,

т.е. $P = q^{10} + 10pq^9 + 45p^2q^8 + 120p^3q^7 = q^7(q^3 + 10pq^2 + 45p^2q + 120p^3)$.

Полагая $p = 0,4$, $q = 0,6$, получим $P = 0,6^7(0,216 + 1,44 + 4,32 + 7,68) \approx 0,38$.

Пример. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

Решение. Вероятность рождения мальчика равна $p = 0,51$. Следовательно, вероятность рождения девочки равна $q = 1 - p = 1 - 0,51 = 0,49$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}(0,51)^2 \cdot (0,49)^3 \approx 0,306 .$$

§11. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

В тех случаях, когда использование формулы Бернулли затруднено из-за большого значения n, можно использовать асимптотическую формулу из следующей теоремы.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) .$$

Здесь $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$,

соответствующие положительным значениям аргумента x (приложение, табл. 1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, т.к. функция $\varphi(x)$ четна, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$.

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ – функция Лапласа,

$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Имеются таблицы функции Лапласа (приложение, табл. 2) для положительных значений x ($0 \le x \le 5$); для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0,5$. Для отрицательных значений используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е.

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

Решение. По условию задачи $n = 100$; $k = 50$; $p = 0,51$; $q = 1 - p = 0,49$.

Так как $n = 100$ – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Найдём значение x: $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx -0,2$.

По справочным таблицам (см. приложение, табл.1) найдем

$\varphi(-0,2) = \varphi(0,2) \approx 0,3910$ (т.к. функция $\varphi(x)$ – четная).

Искомая вероятность $P_{100}(50) \approx \frac{0,3910}{5} \approx 0,0782$.

Пример. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз и не более 90 раз.

Решение. По условию задачи $n = 100$; $k_1 = 75$; $k_2 = 90$; $p = 0,8$; $q = 1 - p = 0,2$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,25.$$

Так как функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим

$$P_{100}(75 \le k \le 90) = \Phi(2,25) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,25) + \Phi(1,25).$$

По справочным таблицам (см. приложение, табл.2) найдём:

$\Phi(2,25) = 0,4938$; $\Phi(1,25) = 0,3944$.

Искомая вероятность

$P_{100}(75 \le k \le 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$

§12. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступление события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют **наивероятнейшим**, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний .

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

причем:

а) если число ($np - q$) – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число ($np - q$) – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0 и k_0+1;

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример. В урне 10 белых и 40 чёрных шаров. Вынимают подряд 14 шаров, причём цвет вынутого шара регистрируют, а затем шар возвращают в урну. Определить наивероятнейшее число появлений белого шара.

Решение. Здесь $n = 14$, $p = 10/50 = 1/5$, $q = 1 - p = 4/5$. Используя двойное неравенство $np - q \le k_0 \le np + p$ при указанных значениях n, p и q, получим

$14/5 - 4/5 \le k_0 \le 14/5 + 1/5$, т.е. $2 \le k_0 \le 3$.

Таким образом, задача имеет два решения: $k_0 = 2$, $k_0 = 3$.

Пример. Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,7. Сделано 25 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель.

Решение. Здесь $n = 25$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Следовательно,

$25 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le k_0 \le 25 \cdot 0{,}7 + 0{,}7$, т.е. $17{,}2 \le k_0 \le 18{,}2$.

Так как k_0 – целое число, то $k_0 = 18$.

Пример. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в данном городе за 40 лет.

Решение. Имеем $n = 40$, $p = 1/7$, $q = 6/7$. Таким образом,

$40 \cdot \frac{1}{7} - \frac{6}{7} \le k_0 \le 40 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$, т.е. $4\frac{6}{7} \le k_0 \le 5\frac{6}{7}$, т.е. $k_0 = 5$.

Пример. В урне 100 белых и 80 чёрных шаров. Из урны извлекают n шаров (с возвратом каждого вынутого шара). Наивероятнейшее число появлений белого шара равно 11. Найти n.

Решение. Из двойного неравенства $np - q \le k_0 \le np + p$ следует, что

$(k_0 - p)/p \le n \le (k_0 + q)/p$.

Здесь $k_0 = 11$, $p = 100/180 = 5/9$, $q = 4/9$; следовательно,

$\frac{11 - 5/9}{5/9} \le n \le \frac{11 + 4/9}{5/9}$, т.е. $18{,}8 \le n \le 20{,}6$.

Итак, задача имеет два решения: $n = 19$, $n = 20$.

Пример. Найти наиболее вероятное число правильно набранных секретарём страниц среди 19 страниц текста, если вероятность того, что страница набрана с ошибками, равна 0,1.

Решение. По условию задачи $n = 19$; $p = 0{,}9$; $q = 0{,}1$. Найдем наиболее вероятное число правильно набранных страниц из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Подставляя данные задачи, получим

$19 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 19 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$ или $17 \le k_0 \le 18$.

Так как $np - q = 17$ – целое число, то наиболее вероятных чисел два: $k_0 = 17$ и $k_0 + 1 = 18$.

§13. Формула Пуассона

При достаточно больших n, если вероятность события мала ($p \le 0{,}1$), формула Лапласа непригодна. В этих случаях (n велико, $p \le 0{,}1$) пользуются **формулой Пуассона**: вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Здесь $\lambda = np$. Имеются таблицы для вычисления $P_n(k)$, для различных λ и k (приложение, табл. 3).

Пример. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

Решение. Так как вероятность $p = 0{,}004$ очень мала, применение локальной теоремы Лапласа приведет к значительному отклонению от точного значения $P_n(k)$. Поэтому при $p \le 0{,}1$ применяют формулу Пуассона:

$P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = \text{np}$.

По условию задачи $n = 1000$; $k = 5$; $p = 0{,}004$.

Тогда $\lambda = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$.

Подставляя данные задачи, получим

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}1562 .$$

Замечание. Формулы Бернулли, Пуассона и формула, следующая из локальной теоремы Лапласа, служат для нахождения вероятности, что в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, «успех» наступит ровно k раз. Для удобства сведём их в одну таблицу.

Название формулы	Формула	Когда даёт хорошее приближение
Формула Бернулли	$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	Для всех n и p точная формула
Формула, следующая из локальной теоремы Лапласа	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	При $p > 0{,}1$ или $np > 9$
Формула Пуассона	$P_n(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $\lambda = np$	$p \le 0{,}1$ и $np \le 9$

§14. Случайная величина

Случайной величиной называется переменная величина, значения которой зависят от случая. Примеры случайных величин: число попаданий в мишень при данном числе выстрелов; число очков, выпадающее при бросании игральной кости.

Случайная величина, возможные значения которой можно перенумеровать, называется **дискретной.** При этом число значений может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины – бесконечно.

§15. Закон распределения дискретной случайной величины

Для характеристики случайной величины нужно знать совокупность возможных значений этой величины, а также вероятности, с которыми эти значения могут появиться. Эти данные образуют **закон распределения** случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если множество возможных значений X бесконечно, то ряд $p_1 + p_2 + ... + p_n + ...$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан аналитически (в виде формулы)

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i)$$

или с помощью функции распределения (см. §20).

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2)$, ..., $M_n(x_n, p_n)$ (x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют **многоугольником или полигоном распределения вероятностей**.

§16. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n.$$

Если дискретная случайная величина принимает бесконечное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\ ,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M([X - M(X)]^2).$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\ .$$

§17. Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

Свойство 3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1X_2...X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n).$$

Свойство 4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n).$$

§18. Свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя в квадрат:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X).$$

Свойство 3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

§19. Примеры дискретных распределений

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «успеха» в n независимых испытаниях (возможные значения случайной величины X – $0,1,2,\ldots,n$), в каждом из которых вероятность появления «успеха» равна p; вероятность возможного значения $X = k$ (числа k появлений «успеха») вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X) = np.$$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X) = npq.$$

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} ,$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda = np$, и говорят, что случайная величина распределена по **закону Пуассона**.

Пример. Производится n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$, X – число наступлений события A в n испытаниях. Для случая 1) малого n построить ряд распределения, функцию распределения случайной величины X, найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X \le 2)$; 2) большого n и малого p найти $P(X \le 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона; 3) большого n найти вероятность $P(m_1 \le X \le m_2)$.

Решение.

1) $n = 4$, $p = 0,8$.

Возможные значения случайной величины X: 0,1,2,3,4. Пусть им соответствуют вероятности P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. Найдём их, используя формулу Бернулли: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (q = 1 - p)$.

$P_0 = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0,2^4 = 0,0016$, $P_1 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256$,

$P_2 = 6 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536$, $P_3 = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096$,

$P_4 = 1 \cdot 0,8^4 \cdot 1 = 0,4096$.

Таким образом, ряд распределения имеет следующий вид:

X	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

По определению функция распределения находится по формуле

$F(x) = P(X < x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0,0016, & 0 < x \le 1 \\ 0,0016 + 0,0256, & 1 < x \le 2 \\ 0,0272 + 0,1536, & 2 < x \le 3 \\ 0,1808 + 0,4096, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0,0016, & 0 < x \le 1 \\ 0,0272, & 1 < x \le 2 \\ 0,1808, & 2 < x \le 3 \\ 0,5904, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Найдём $M(X)$:

$M(X) = np = 4 \cdot 0,8 = 3,2.$

$D(X) = npq = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,64.$

$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1808.$

2) $n = 1000$, $p = 0,004$.

$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2).$

По формуле Пуассона $P(X = m) = P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ $(\lambda = np)$. Таким образом, имеем:

$$P(X \le 2) = \sum_{m=0}^{2} P_{1000}(m) \approx \sum_{m=0}^{2} \frac{4^m}{m!} e^{-4} \approx 0,0183 + 0,0733 + 0,1465 = 0,2381$$

(значения $P_n(m)$ найдены по табл. 3 приложения).

3) $n = 100$, $p = 0,8$, $m_1 = 75$, $m_2 = 90$.

По условию задачи $q = 1 - p = 0,2$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,25.$$

Так как функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим

$$P_{100}(75 \le k \le 90) = \Phi(2,25) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,25) + \Phi(1,25).$$

По табл.2 приложения найдем:

$$\Phi(2,25) = 0,4938;\ \Phi(1,25) = 0,3944.$$

Искомая вероятность $P_{100}(75 \le k \le 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$.

§20. Функция распределения вероятностей случайной величины

Функцией распределения называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения:

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]: $0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2. Функция распределения есть неубывающая функция:

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в промежутке $[a; b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x, равна нулю: $P(X = x) = 0$.

Свойство 3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Свойство 4. Функция распределения непрерывна слева:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Пример. В тёмной комнате 7 красных кубиков и 8 синих, не отличаемых друг от друга на ощупь. Мальчик вынес три кубика. X – случайная величина числа красных кубиков среди вынесенных. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения $F(x) = P(X < x)$ и найти вероятность $P(X < 2)$.

Решение. Возможные значения случайной величины X: 0,1,2,3. Пусть им соответствуют вероятности P_0, P_1, P_2, P_3. Найдём их, используя непосредственный подсчёт:

$$P_0 = \frac{C_7^0 \cdot C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{1 \cdot \frac{8!}{3!5!}}{\frac{15!}{3!5!}} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{56}{455},$$

$$P_1 = \frac{C_7^1 \cdot C_8^2}{C_{15}^3} = \frac{7 \cdot \frac{8!}{2!6!}}{455} = \frac{196}{455},$$

$$P_2 = \frac{C_7^2 \cdot C_8^1}{C_{15}^3} = \frac{8 \cdot \dfrac{7!}{2!5!}}{455} = \frac{168}{455},$$

$$P_3 = \frac{C_7^3 \cdot C_8^0}{C_{15}^3} = \frac{1 \cdot \dfrac{7!}{3!4!}}{455} = \frac{35}{455}.$$

Проверка: $\frac{56}{455} + \frac{196}{455} + \frac{168}{455} + \frac{35}{455} = 1.$

Таким образом, закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3
p	$\frac{56}{455}$	$\frac{196}{455}$	$\frac{168}{455}$	$\frac{35}{455}$

Найдём $M(X)$:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 =$$

$$= 0 \cdot \frac{56}{455} + 1 \cdot \frac{196}{455} + \frac{2 \cdot 168}{455} + \frac{3 \cdot 35}{455} = \frac{637}{455} = 1,4.$$

Дисперсию будем искать по формуле $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Составим закон распределения для X^2.

X^2	0	1	4	9
p	$\frac{56}{455}$	$\frac{196}{455}$	$\frac{168}{455}$	$\frac{35}{455}$

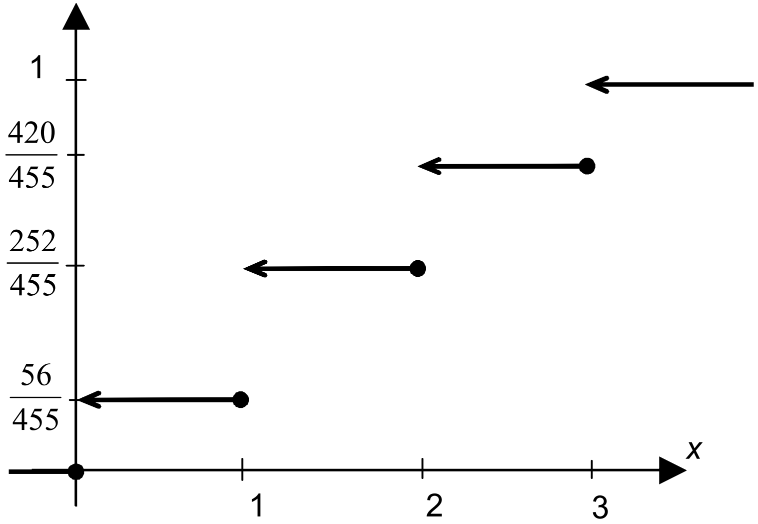
$M(X^2) = \frac{196}{455} + \frac{4 \cdot 168}{455} + \frac{9 \cdot 35}{455} = 2,6.$

$D(X) = 2,6 - (1,4)^2 = 0,64.$

По определению функция распределения находится по формуле $F(x) = P(X < x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{56}{455}, & 0<x\le 1\\ \dfrac{56+196}{455}, & 1<x\le 2\\ \dfrac{252+168}{455}, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases} = \begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{56}{455}, & 0<x\le 1\\ \dfrac{252}{455}, & 1<x\le 2\\ \dfrac{420}{455}, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Построим график функции распределения:



По функции распределения $P(X<2)=F(2)=\dfrac{252}{455}$.

§21. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называется первая производная от функции распределения:

$$f(x)=F'(x).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;\ b)$, определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Свойства плотности распределения:

Свойство 1. Плотность распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \geq 0$.

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения по всей числовой оси равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

§22. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X.

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

или равносильным равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 .$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Все свойства числовых характеристик, указанные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Пример. Дана функция плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ A(x+2), & 0<x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$$

Найти: 1) параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) $P(1 < x < 4)$; 4) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 5) вероятность P, что отклонение случайной величины от $M(X)$ не более 1.

Решение. Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, получаем $\int\limits_{0}^{2} A(x+2)dx=1$, так как

$\int\limits_{0}^{2} A(x+2)d(x+2)=A\left.\dfrac{(x+2)^2}{2}\right|_0^2=A(8-2)=6A$, тогда $6A=1\Rightarrow A=\dfrac{1}{6}$.

Итак, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{6}(x+2), & 0<x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$

Найдём $F(x)$, функцию распределения по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

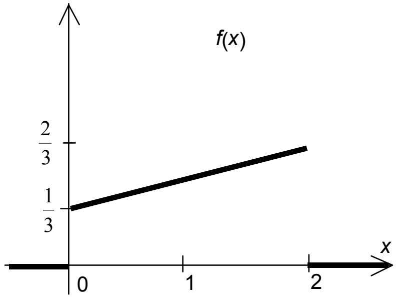
если $x\le 0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0,$

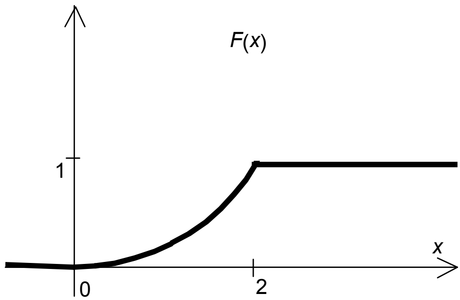
если $0<x<2$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\dfrac{1}{6}(t+2)dt=\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{x}{3},$

если $2\le x<\infty$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{2}\dfrac{1}{6}(x+2)dx+\int\limits_{2}^{x} 0dt=\left.\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{x}{3}\right|_0^2=\dfrac{4}{12}+\dfrac{2}{3}=1.$

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x}{3}, & 0 < x < 2; \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$

Построим оба графика





Найдём $P(1 < x < 4)$.

Так как $P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$,

$$F(1) = \left.\frac{x^2}{12} + \frac{x}{3}\right|_{x=1} = \frac{5}{12},\ F(4) = 1,$$

$$P(1 < x < 4) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Найдём $M(X)$ по формуле $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$.

$$M(X)=\frac{1}{6}\int_0^2 x(x+2)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{10}{9}.$$

Дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X);$$

$$M(X^2)=\frac{1}{6}\int_0^2 x^2(x+2)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{14}{9};$$

$$D(X)=\frac{14}{9}-\left(\frac{10}{9}\right)^2=\frac{26}{81}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{26}{81}}\approx 0,57.$$

Найдём $P\left(\left|X-M(X)\right|<1\right)$. Так как $\left|X-M(X)\right|<1$, следует

$M(X)-1<X<M(X)+1$ в нашей задаче $\frac{10}{9}-1<X<\frac{10}{9}+1$ или $\frac{1}{9}<X<\frac{19}{9}$,

то необходимо найти

$$P\left(\frac{1}{9}<X<\frac{19}{9}\right)=F\left(\frac{19}{9}\right)-F\left(\frac{1}{9}\right)=1-\left(\frac{1}{81\cdot 12}+\frac{1}{27}\right)=\frac{935}{972}\approx 0,962.$$

§23. Примеры непрерывных распределений

Равномерным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, если на интервале (*a*; *b*), которому принадлежат все возможные значения *X*, плотность сохраняет постоянное значение, а именно

$f(x)=\frac{1}{b-a}$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной в интервале (*a*; *b*), равно полусумме концов этого интервала:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(a; b)$, определяется равенством

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$, вычисляется по формуле

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Функция распределения случайной величины X находится по формуле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

а вероятность отклонения нормально распределённой случайной величины от её математического ожидания менее чем на δ равна:

$$p\left(\left|X - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трёх сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0,9973.

Пример. Масса вагона - случайная величина, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т и средним квадратичным отклонением 0,9 т. Найти вероятность того, что вагон имеет массу не более 67 т и не менее 64 т. По правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Решение. Для нормального распределённой случайной величины

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{67-65}{0,9}\right) - \Phi\left(\frac{64-65}{0,9}\right) =$$

$$= \Phi(2,22) + \Phi(1,11) = 0,4868 + 0,3665 = 0,8533.$$

По правилу трёх сигм наименьшая граница $a - 3\sigma$, наибольшая граница $a + 3\sigma$. Таким образом, $65 \pm 3 \cdot 0,9 = 65 \pm 2,7$.

Наименьшая граница 62,3 т, наибольшая 67,7 т.

§24. Закон больших чисел

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если последовательность попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ имеет конечные математические ожидания и дисперсии этих величин равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е. если ε – любое положительное число, то

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)| < \varepsilon) = 1.$$

Теорема Бернулли (Закон больших чисел). Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико, т.е. $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) = 1$, где ε – любое сколь угодно малое положительное число.

§25. Центральная предельная теорема

Теорема Ляпунова. Если случайные величины в последовательности $X_1, X_2,\ldots, X_n,\ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют конечное математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2, то для любого действительного x

$$F(x) \to \Phi(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{, где } F(x) = P\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} < x \right] \text{ – функция}$$

распределения случайной величины $\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$.

§26. Системы случайных величин

Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В этом случае принято говорить, что указанные случайные величины образуют систему

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Систему двух случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки (X, Y) в область D, принято обозначать в виде $(X, Y) \in D$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин может быть задан с помощью таблицы

X \ Y	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$, т.е.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

Примечание. Функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют также совместной функцией распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

В двумерном случае для случайной величины (X, Y) функция распределения $F(x, y)$ определяется равенством $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.

Геометрически функция распределения $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки $M(x, y)$. Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются – это означает, что функция распределения непрерывна слева по каждому из аргументов.

В случае дискретной двумерной случайной величины её функция распределения определяется по формуле: $F(x, y) = \sum_{i}\sum_{j} p_{ij}$, где суммирование вероятностей распространяется на все i, для которых $x_i < x$, и все j, для которых $y_j < y$.

Отметим свойства функции распределения двумерной случайной величины, аналогичные свойствам функции распределения одномерной случайной величины.

1. Функция распределения $F(x, y)$ есть неотрицательная функция, заключённая между нулём и единицей, т.е. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. Функция распределения $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов, т.е.

$$\text{при } x_2 > x_1 \quad F(x_2, y) \ge F(x_1, y),$$

$$\text{при } y_2 > y_1 \quad F(x, y_2) \ge F(x, y_1).$$

3. Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, функция распределения $F(x, y)$ равна нулю, т.е. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0.$

4. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x),$$

$$F(+\infty, y) = F_2(y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y, т.е. $F_1(x) = P(X < x),\quad F_2(y) = P(Y < y).$

5. Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице: $F(+\infty, +\infty) = 1.$

Закон распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y) будем задавать с помощью функции плотности вероятности $f(x, y)$.

Плотностью вероятности (плотностью распределения или совместной плотностью) непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная её функции распределения, т.е.

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y).$$

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D определяется равенством

$$P\big[(X, Y) \in D\big] = \iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

Функция плотности вероятности обладает следующими свойствами:

1. $f(x, y) \ge 0.$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dxdy = 1.$

Если все случайные точки (X, Y) принадлежат конечной области D, то последнее условие принимает вид $\iint_D f(x, y)\,dxdy = 1.$

Математические ожидания дискретных случайных величии X и Y, входящих в систему, определяются по формулам

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \;\; m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij},$$

а математические ожидания непрерывных случайных величин – по формулам

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy, \;\; m_y = M(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy.$$

Точка (m_x; m_y) называется **центром рассеивания** системы случайных величин (X, Y).

Математические ожидания m_x и m_y можно найти и проще, если случайные величины X и Y независимы. В этом случае из законов распределения этих случайных величин можно определить математические ожидания m_x и m_y по формуле, приведенной в §16 для дискретных случайных величин и в §22 для непрерывных случайных величин.

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяются по формулам

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_x)^2, \;\; D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_j - m_y)^2.$$

Дисперсии же непрерывных случайных величии X и Y, входящих в систему, находятся по формулам

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x,y)dxdy, \;\; D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 f(x,y)dxdy.$$

Средние квадратические отклонения случайных величин X и Y определяются по формулам

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \;\; \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Для вычисления дисперсий могут быть применены формулы

$$D(X) = M(X)^2 - [M(X)]^2, \;\; D(Y) = M(Y)^2 - [M(Y)]^2,$$

Важную роль в теории систем случайных величин играет так называемый *корреляционный момент (ковариация)*

$$C_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Для дискретных случайных величин корреляционный момент находится по формуле

$$C_{xy}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij},$$

а для непрерывных – по формуле

$$C_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy.$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми,* если вероятность одной из них принять значение, лежащее в любом промежутке области её значений, не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В этом случае

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Ковариация двух случайных величин характеризует как степень зависимости случайных величин, так и их рассеяние вокруг точки (m_x, m_y).

Свойства ковариации случайных величин:

1. $C_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y).$

Здесь

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_i p_{ij}$$

для дискретных случайных величин X и Y и

$$M(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(xy)dxdy$$

для непрерывных величин.

2. Ковариация двух независимых случайных величин равна нулю, т.е.

$$C_{xy} = 0.$$

3. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит произведения их средних квадратических отклонений, т.е.

$$\left|C_{xy}\right|\le\sigma_x\sigma_y.$$

Для характеристики связи между величинами X и Y рассматривается так называемый *коэффициент корреляции*

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

являющийся безразмерной величиной.

Свойства коэффициента корреляции:

1. Коэффициент корреляции удовлетворяет условию: $-1 \le r_{xy} \le 1$.
2. Если случайные величины X и Y независимы, то $r_{xy} = 0$.
3. Если случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью $Y = aX + b$, то $r_{xy} = \operatorname{sgn} a$, т.е. $r_{xy} = 1$ при $a > 0$ и $r_{xy} = -1$ при а < 0.

Пример. В двух ящиках находятся по шесть шаров; в первом ящике: 1 шар с №1, 2 шара с №2, 3 шара с №3; во втором ящике: 2 шара с №1, 3 шара с №2, 1 шар с №3. Пусть X – номер шара, вынутого из первого ящика, Y – номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин (X, Y). Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y. Определить коэффициент корреляции.

Решение.

Случайная точка (1, 1) имеет кратность $1 \times 2 = 2$;

– // – (1, 2) – // – $1 \times 3 = 3$;

– // – (1, 3) – // – $1 \times 1 = 1$;

– // – (2, 1) – // – $2 \times 2 = 4$;

– // – (2, 2) – // – $2 \times 3 = 6$;

– // – (2, 3) – // – $2 \times 1 = 2$;

– // – (3, 1) – // – $3 \times 2 = 6$;

– // – (3, 2) – // – $3 \times 3 = 9$;

– // – (3, 3) – // – $3 \times 1 = 3$.

Всего случайных точек $6 \times 6 = 36$ (n-кратную точку принимаем за n точек). Так как отношение кратности точки ко всему количеству точек равно вероятности появления этой точки, то таблица закона распределения системы случайных величин имеет вид

X \ Y	1	2	3

1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Сумма всех вероятностей, указанных в таблице, равна единице.

Найдём математические ожидания случайных величин X и Y

$$m_x = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{3};$$

$$m_y = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{18}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{11}{6}.$$

Точка (7/3; 11/6) является центром рассеивания для заданной системы (X, Y). Так как случайные величины X и Y независимы, то математические ожидания m_x и m_y можно подсчитать проще, используя ряды распределения:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

y_i	1	2	3
p_i	1/3	1/2	1/6

Отсюда находим

$$m_x = \sum p_i x_i = \frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{7}{3},\quad m_y = \sum p_i y_i = \frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}=\frac{11}{6}.$$

От системы величин (X, Y) перейдём к системе центрированных величин $(\tilde{X},\tilde{Y})$, где $\tilde{X} = X - m_x = X - 7/3$, $\tilde{Y} = Y - m_y = Y - 11/6$. Составим таблицу

$\tilde{X}$ \ $\tilde{Y}$	–5/6	1/6	7/6
–4/3	1/18	1/12	1/36
–1/3	1/9	1/6	1/18
2/3	1/6	1/4	1/12

Имеем

$$D(X) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+$$

$$+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{9};$$

$$D(Y)=\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+$$

$$+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{17}{36}.$$

Отсюда $\sigma_x=\sqrt{5}/3$, $\sigma_y=\sqrt{17}/6$.

Заметим, что $D(X)$ и $D(Y)$ можно найти по формулам

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2,\ \ D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2.$$

Для нахождения коэффициента корреляции воспользуемся таблицей распределения системы $(\tilde{X},\tilde{Y})$ центрированных случайных величин.

Определим ковариацию:

$$C_{xy}=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{36}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{9}+$$

$$+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{18}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{12}=$$

$$=-\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{108}+\frac{1}{72}+\frac{7}{216}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{54}+\frac{1}{36}+\frac{7}{108}\right)+\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{36}+\frac{1}{24}+\frac{7}{72}\right)=$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 0=0.$$

Так как $C_{xy}=0$, то и коэффициент корреляции $r_{xy}=0$.

Этот же результат мы могли получить и не определяя ковариации C_{xy}. Действительно, полагая $Y=1$, получаем, что значение $X=1$ повторяется 2 раза, значение $X=2$ – 4 раза, а значение $X=3$ – 6 раз. Значит при $Y=1$ получаем ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Если $Y=2$, то значение $X=1$ повторяется 3 раза, значение $X=2$ – 6 раз, а значение $X=3$ – 9 раз. Следовательно, при $Y=2$ получается ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Наконец, если $Y = 3$, то значение $X = 1$ повторяется 1 раз, значение $X = 2$ – 2 раза, а значение $X = 3$ – 3 раза. Ряд распределения случайной величины X при $Y = 3$ имеет вид

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Итак, при различных значениях Y получаем один и тот же ряд распределения случайной величины X. Так как ряд распределения случайной величины X не зависит от значений случайной величины Y, то случайные величины X и Y независимы. Отсюда следует, что коэффициент корреляции равен нулю.

Пример. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y) & \text{в области } D; \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

Область D – квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$. Требуется: 1) определить коэффициент a; 2) вычислить вероятность попадания случайной точки (X; Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$; 3) найти математические ожидания m_x и m_y; 4) найти средние квадратические отклонения σ_x и σ_y.

Решение. 1. Коэффициент a находим из уравнения

$$a\int_0^3\int_0^3 (x+y)dxdy = 1, \text{ откуда}$$

$$a\int_0^3\int_0^3 (x+y)dxdy = a\int_0^3 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^3 dx = a\int_0^3 \left(3x + \frac{9}{2}\right)dx =$$

$$= a\left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_0^3 = a\left(\frac{27}{2} + \frac{27}{2}\right) = 27a, \quad 27a = 1, \text{ т.е. } a = \frac{1}{27}.$$

2. $$P\left[(X;Y) \in Q\right] = \frac{1}{27}\int_1^2\int_1^2 (x+y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{27}\int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx = \frac{1}{27}\int_1^2 \left(2x + 2 - x - \frac{1}{2}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{27}\int_1^2\left(x+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{1}{27}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right]_1^2=\frac{1}{27}\left(2+3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{9}.$$

3. Находим математические ожидания m_x и m_y; имеем

$$m_x=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 x(x+y)dxdy=\frac{1}{27}\int_0^3\left[x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\left(3x^2+\frac{9}{2}x\right)dx=\frac{1}{27}\left[x^3+\frac{9}{4}x^2\right]_0^3=\frac{1}{27}\left(27+\frac{81}{4}\right)=\frac{7}{4}.$$

Следовательно, и $m_y=\frac{7}{4}$.

4. Находим средние квадратические отклонения σ_x и σ_y:

$$\sigma_x^2=\iint_D(x-m_x)^2f(x,y)dxdy=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2(x+y)dydx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\left(x-\frac{7}{4}+y+\frac{7}{4}\right)dydx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3dydx+\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\left(y+\frac{7}{4}\right)dydx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot y\Big|_0^3dx+\frac{1}{27\cdot 2}\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right)^2\Bigg|_0^3dx=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{7}{4}\right)^4\Bigg|_0^3+\frac{1}{27\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{361}{16}-\frac{49}{16}\right)\Bigg|_0^3=\frac{11}{16}.$$

Итак, $\sigma_x=\sigma_y=\frac{\sqrt{11}}{4}$.

§27. Задачи математической статистики

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении статистических данных – результатах наблю-

дений.
Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки (если данных очень много) статистических сведений.
Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

§28. Основные понятия математической статистики

Генеральная совокупность – совокупность всех изучаемых объектов, N – её объём (количество всех объектов).
Выборочная совокупность – совокупность объектов, отобранных для изучения, n – объём выборки.
Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.
Таким образом, вместо большой совокупности объектов изучается совокупность объёма, значительно меньшего по количеству объектов ($n \ll N$).
Результаты, полученные при изучении выборки, распространяются на объекты всей генеральной совокупности. Для этого выборка должна быть **репрезентативной** (представительной), то есть правильно представлять генеральную совокупность. Это обеспечивается случайностью отбора.
Виды отбора:
– простой случайный:
повторный;
бесповторный;
– сложный случайный:
типический;
механический;
серийный.
Простой случайный отбор – производится без деления генеральной совокупности на части.
Повторный отбор – отобранный объект возвращается в генеральную совокупность.
Бесповторный отбор – отобранный объект не возвращается в генеральную

совокупность.
Сложный случайный отбор – производится после предварительного деления генеральной совокупности на части.
Типический отбор – генеральная совокупность делится на типы, из каждого типа случайно отбираются объекты пропорционально объёму типов.
Механический отбор – генеральная совокупность делится на части механически, из каждой части случайно отбираются объекты.
Серийный отбор – генеральная совокупность делится на серии, и случайным образом отбираются целые серии объектов.

§29. Статистическое распределение выборки и его характеристики

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, x_k – n_k раз и $\sum n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют **вариантами**, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – **вариационным рядом**. Числа наблюдений называются **частотами**, а их отношения к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ – **относительными частотами**.
Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.
Результаты выборки представляются в виде статистического распределения:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

где $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$;
x_i – варианты;
n_i – соответствующие им частоты;
n – объём выборки;
$W_i = \frac{n_i}{n}$ – относительные частоты.

Распределение относительных частот:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

Основные характеристики выборки:

$\overline{x}_B$ – выборочная средняя;

D_B – выборочная дисперсия;

σ_B – выборочное среднее квадратичное отклонение;

S^2 – исправленная дисперсия.

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \ldots + x_k n_k}{n},$$

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{n} = \frac{(x_1 - \overline{x}_B)^2 n_1 + (x_2 - \overline{x}_B)^2 n_2 + \ldots + (x_k - \overline{x}_B)^2 n_k}{n},$$

$$D_B = \overline{x_B^2} - \overline{x}_B^2, \text{ где } \overline{x_B^2} = \frac{x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_k^2 n_k}{n},$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}, \quad S^2 = \frac{n}{n-1} D_B.$$

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

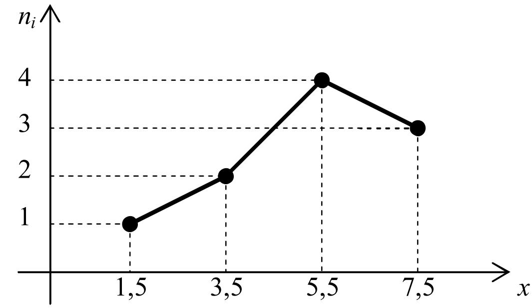
где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

§30. Полигон и гистограмма

Полигон абсолютных частот – это ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i).

Пример.

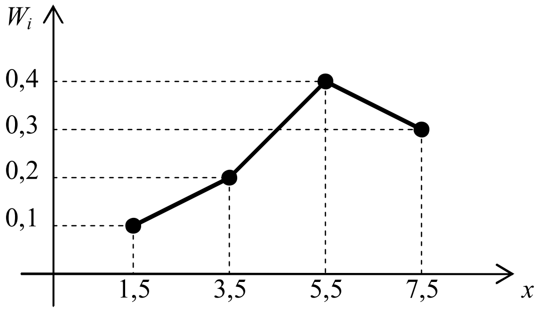
x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
n_i	1	2	4	3



Полигон относительных частот – это ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_i, W_i).

Пример.

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
W_i	0,1	0,2	0,4	0,3



Статистическое распределение может носить интервальный (непрерывный) характер.

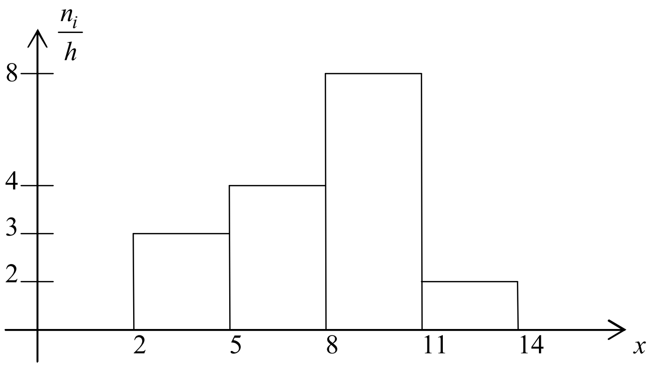
Пример.

x	2 – 5	5 – 8	8 – 11	11 – 14
n_i	9	12	24	6

h – длина частичного интревала.

$h = 5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3.$

Гистограмма частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты).



Пример. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 1$, $x_5 = 10$, $x_6 = 5$, $x_7 = 9$, $x_8 = 6$, $x_9 = 8$, $x_{10} = 6$, $x_{11} = 2$, $x_{12} = 3$, $x_{13} = 7$, $x_{14} = 6$, $x_{15} = 8$, $x_{16} = 3$, $x_{17} = 8$, $x_{18} = 10$, $x_{19} = 6$, $x_{20} = 7$, $x_{21} = 3$, $x_{22} = 9$, $x_{23} = 4$, $x_{24} = 5$, $x_{25} = 6$.

Требуется: 1) составить таблицу, устанавливающую зависимость между значениями случайной величины и её частотами; 2) построить статистическое распределение; 3) изобразить полигон распределения.

Решение. 1. Найдём объём выборки: $n = 25$. Составим таблицу

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_x	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

2. Статистическое распределение имеет вид

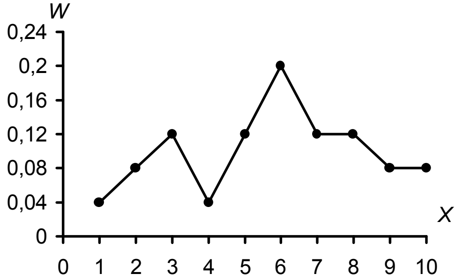
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	1/25	2/25	3/25	1/25	3/25	5/25	3/25	3/25	2/25	2/25

Контроль: $\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}+\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{5}{25}+\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{2}{25}=1.$

Последнюю таблицу можно переписать в виде

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,04	0,08	0,12	0,04	0,12	0,2	0,12	0,12	0,08	0,08

3. Возьмём на плоскости xOw точки (1; 0,04), (2; 0,08), (3; 0,12) и т.д. Последовательно соединив эти точки прямолинейными отрезками, получим полигон распределения случайной величины X.



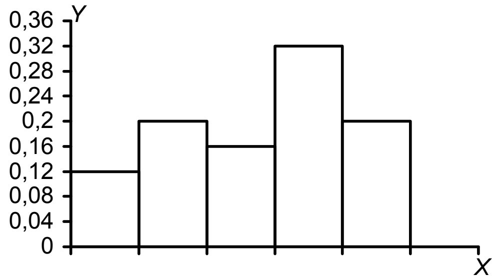
Пример. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения $x_1 = 16$, $x_2 = 17$, $x_3 = 9$, $x_4 = 13$, $x_5 = 21$, $x_6 = 11$, $x_7 = 7$, $x_8 = 7$, $x_9 = 19$, $x_{10} = 5$, $x_{11} = 17$, $x_{12} = 5$, $x_{13} = 20$, $x_{14} = 18$, $x_{15} = 11$, $x_{16} = 4$, $x_{17} = 6$, $x_{18} = 22$, $x_{19} = 21$, $x_{20} = 15$, $x_{21} = 15$, $x_{22} = 23$, $x_{23} = 19$, $x_{24} = 25$, $x_{25} = 1$.
Требуется: составить таблицу статистического распределения, разбив промежуток (0, 25) на пять участков, имеющих одинаковые длины; построить гистограмму одинаковых частот.
Решение. Предварительно составим таблицу

X	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
n_x	3	5	4	8	5

Статистическое распределение имеет вид

X	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
W	0,12	0,2	0,16	0,32	0,2

Гистограмма относительных частот изображена на рисунке



§31. Точечные оценки параметров генеральной совокупности

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **несмещённой**, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т.е. $M(\tilde{\theta}_n)=\theta.$ В противном случае оценка называется смещённой.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **состоятельной**, если она удовлетворяет закону больших чисел, т.е. сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\tilde{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon)=1.$$

В случае использования состоятельных оценок оправдывается увеличение объёма выборки, так как при этом становятся маловероятными значительные ошибки при оценивании. Поэтому практический смысл имеют только состоятельные оценки. Если оценка состоятельна, то практически достоверно, что при достаточно большом *n*

$$\tilde{\theta}_n \approx \theta.$$

Несмещённая оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **эффективной**, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещённых оценок параметра θ, вычисленных по выборкам одного и того же объёма *n*.

Параметры генеральной совокупности $\overline{x}_Г$ – генеральная средняя и $D_Г$ – генеральная дисперсия оцениваются по соответствующим параметрам выборки:

$$\overline{x}_Г \approx \overline{x}_В, \;\; D_Г \approx D_В \;(n \geq 30), \;\; \sigma_Г \approx \sqrt{D_Г}.$$

$$D_Г \approx S^2 \;(n < 30),$$

Пример.

x_i	2	4	5	6
n_i	8	9	10	3

$n = 8+9+10+3 = 30$ – объём выборки.

$$\overline{x}_В = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{2\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 10 + 6\cdot 3}{30} = \frac{120}{30} = 4.$$

$$D_В = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_В)^2 n_i}{n} = \frac{(2-4)^2\cdot 8 + (4-4)^2\cdot 9 + (5-4)^2\cdot 10 + (6-4)^2\cdot 3}{30} = 1,8$$

или

$$D_В = \overline{x_В^2} - \overline{x}_В^2.$$

$$\overline{x_В^2} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{2^2\cdot 8 + 4^2\cdot 9 + 5^2\cdot 10 + 6^2\cdot 3}{30} = 17,8;$$

$$D_В = 17,8 - 4^2 = 1,8;$$

$$\sigma_В = \sqrt{D_В} = \sqrt{1,8} \approx 1,3;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_В = \frac{30}{29}\cdot 1,8 \approx 1,86.$$

Таким образом, точечные оценки характеристик генеральной совокупности:

$\overline{x}_Г \approx 4;\;\; D_Г \approx D_В \approx 1,8;\;\; \sigma_Г \approx 1,3.$

Для интервального распределения сначала находят середины интервалов x_i.

Пример.

x	2 – 5	5 – 8	8 – 11	11 – 14
n_i	9	10	25	6

Переходим к дискретному распределению

x_i	3,5	6,5	9,5	12,5
n_i	9	10	25	6

Дальнейшие вычисления проводим, как в предыдущем примере. Получаем:

$\overline{x}_B = 3{,}91;\ \overline{x_B^2} = 74{,}53;\ D_B \approx 59{,}24;\ S^2 \approx 60{,}45.$

Таким образом: $\overline{x}_Г \approx 3{,}91;\ D_Г \approx S^2 \approx 60{,}45;\ \sigma_Г = \sqrt{D_Г} \approx 7{,}77.$

§32. Интервальная оценка (доверительный интервал) для генеральной средней

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2), содержащий истинное значение θ с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$, т.е.

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha.$$

Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется **доверительной вероятностью (надежностью)**, а значение α – уровнем значимости.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\overline{x}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ служит доверительный интервал

$$\overline{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где n – объем выборки; t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. приложение, табл. 2), при котором $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$.

$\overline{x}_Г$ – генеральная средняя (оцениваемый параметр);

$\overline{x}_B$ – средняя выборочная, точечная оценка генеральной средней;

δ – точность оценки.

γ – надёжность оценки.

$(\overline{x}_B - \delta; \overline{x}_B + \delta)$ – доверительный интервал для $\overline{x}_Г = a$.

$\overline{x}_Г \in (\overline{x}_B - \delta; \overline{x}_B + \delta)$ с вероятностью (надёжностью) γ.

Для нормального распределения признака

$$\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\sigma = \sigma_Г$; n – объём выборки; t – находят из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$ с помощью табл. 2 (см. приложение). Таким образом, для нормально распределённой величины X:

$$P\left(\left|\overline{x}_Г - \overline{x}_B\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Чем больше n, тем меньше δ, то есть точность оценки увеличивается при увеличении объёма выборки.

Чем выше γ – надёжность оценки, тем меньше её точность (δ увеличивается).

Если σ неизвестно, то $\delta = t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, где $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$ – исправленная выборочная дисперсия, t_γ находится из табл. 4 (приложение) по заданным значениям γ и n.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного качественного признака X по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению S служит доверительный интервал

$S \cdot (1 - q) < \sigma < S \cdot (1 + q)$, при $q < 1$;

$0 < \sigma < S \cdot (1 + q)$, при $q > 1$,

где $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D^*}$ – «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение; q находят по табл. 5 приложения по заданным n и γ.

Пример. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания «а» нормально распределённого признака, если известны: $\sigma = 2$; $\overline{x}_B = 5,4$; $n = 10$; $\gamma = 0,95$.

Решение. $2\Phi(t) = 0,95 \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475.$

Из таблицы $t = 1,960$, $\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{10}} \approx 1,24.$

Доверительный интервал $(\overline{x}_B - \delta; \overline{x}_B + \delta) = (5,4 - 1,24; 5,4 + 1,24) = (4,16; 6,64)$.

Пример. Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,95 точность оценки математического ожидания нормально распределённого признака по выборочной средней будет равна 0,2, если среднее квадратическое отклонение равно 2.

Решение. Дано: $\gamma = 0,95$; $\delta = 0,2$; $\sigma = 0,2$; найти n.

Из формулы $\delta = t \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ находим $n = \dfrac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$. Из условия $2\Phi(t) = 0,95$ находим $t = 1,96$. Тогда $n = \dfrac{1,96^2 \cdot 2^2}{0,2^2} = 384,16 \approx 385$.

Пример. По заданным значениям характеристик нормально распределённого признака найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания: $\gamma = 0,95$; $n = 12$; $S = 1,5$; $\overline{x}_B = 16,8$.

Решение. $\delta = t_\gamma \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$. Из табл. 4 по данным γ и n находим $t_\gamma = 2,20$. Тогда

$\delta = 2,20 \cdot \dfrac{1,5}{\sqrt{12}} = 0,95$.

Доверительный интервал $(16,8 - 0,95; 16,8 + 0,95) = (15,85; 17,75)$.

§33. Понятие о критериях согласия

Статистической называется гипотеза о неизвестном законе распределения случайной величины или о параметрах закона распределения, вид которого известен.

Нулевой (основной) гипотезой называется выдвинутая гипотеза H_0.

Конкурирующей (альтернативной) гипотезой называется гипотеза H_1, которая противоречит нулевой гипотезе H_0.

Пусть имеется статистическое распределение выборки для случайной величины X:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

По виду полигона или гистограммы, сравнивая их с графиками дифференциальных функций распределения, делаем предположение о виде закона распределения случайной величины.

Сделанное предположение (гипотеза) подтверждается расчётами критерия согласия. Имеются различные критерии согласия: Хинчина, Колмогорова, Пирсона. Например, критерий Пирсона (хи-квадрат)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

позволяет сравнивать близость частот n_i – данного статистического распределения с теоретическими частотами n_i', найденными с помощью функции распределения предполагаемого закона:

$$n_i' = np_i = nP(x_i < X < x_{i+1}) = n[F(x_{i+1}) - F(x_i)] \approx nf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i),$$

$i = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$ где $f(x)$ – дифференциальная, $F(x)$ – интегральная функции предполагаемого распределения.

Если вычисленное значение критерия χ^2 не превосходит некоторого критического значения $\chi^2_{\text{кр}}$, взятого по таблице, то выдвинутая гипотеза принимается с заданным уровнем надёжности (вероятности) $\gamma = 1 - \alpha.$ В противном случае гипотеза отвергается.

В табл. 6 приложения:

α – уровень значимости, это вероятность отвергнуть гипотезу;

s – число степеней свободы, $s = k - 1 - r,$ где

r – число параметров предполагаемого распределения:

$r = 2$ для нормального распределения (a и σ),

$r = 1$ для показательного распределения (λ).

При проверке гипотезы H_0 возможны следующие ошибки:

ошибка первого рода – отвергнуть гипотезу H_0 при её правильности;

ошибка второго рода – принятие гипотезы H_0 при правильности альтернативной гипотезы H_1.

§34. Виды зависимостей между случайными величинами *X* и *Y*

X, Y – количественные признаки, связанные между собой.

x_i, y_i – их возможные значения.

Функциональная зависимость – каждому значению признака X соответствует единственное значение признака Y: $x \quad \to \quad y = f(x)$.

Статистическая зависимость – каждому значению признака X соответствует статистическое распределение признака Y:

$$x \quad \to \quad \frac{y_i \,|\; y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_k}{n_i \,|\; n_1 \quad n_2 \quad \ldots \quad n_k}.$$

Корреляционная зависимость – каждому значению признака X соответствует среднее значение признака Y (условная средняя $\overline{y}_x$):

$$x \quad \to \quad \overline{y}_x = f(x).$$

Аналогично: $y \quad \to \quad \overline{x}_y = \varphi(x)$.

$x \quad \to \quad \overline{y}_x = f(x)$ – уравнение регрессии y по x.

$y \quad \to \quad \overline{x}_y = \varphi(x)$ – уравнение регрессии x по y.

Примеры. Площадь квадрата Y есть функция от длины стороны квадрата X: $y = x^2$, зависимость функциональная.

Товарооборот магазина Y зависит от числа торговых работников X. Эта зависимость корреляционная.

Две основные задачи теории корреляции:

1. Определить форму корреляционной связи, то есть определить вид уравнения регрессии.
2. Оценить тесноту (силу) корреляционной связи.

§35. Корреляционная таблица

Все наблюдения числовых признаков X и Y с соответствующими частотами записываются в корреляционную таблицу.

Пример.

x \ y	2	4	6	n_x
1	2	–	4	6
3	–	5	6	11
5	3	9	3	15
n_y	5	14	13	$n = 32$

Числа 1; 3; 5 (левый столбец таблицы) показывают наблюдаемые значения признака X. Числа 2; 4; 6 (первая строка) показывают наблюдаемые значения

признака Y.
Числа внутри таблицы показывают частоту появления соответствующей пары значений (X, Y). Например, пара (1; 2) наблюдалась 2 раза, пара (3; 4) – 5 раз, пара (1; 4) не наблюдалась ни разу (соответствующая частота равна 0).
По данным наблюдений вычислены частоты n_x, n_y, n:
n_x – частота появления данного значения X,
n_y – частота появления данного значения Y,
n – объём выборки, количество всех наблюдаемых пар (X, Y).
Так, значение $x = 1$ наблюдалось 2 + 4 = 6 раз; значение $x = 5$ наблюдалось 3 + 9 + 3 = 15 раз и т.д. Объём выборки n = 6 + 11 + 15 + 32 или n = 5 + 14 + 13 + 32.
В общем виде корреляционная таблица выглядит так:

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	n_x
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1m}	n_{x_1}
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2m}	n_{x_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	$\dots$	n_{km}	n_{x_k}
n_y	n_{y_1}	n_{y_1}	$\dots$	n_{y_m}	n

$$n_{x_i} = n_{i1} + n_{i2} + \ldots + n_{im} = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}; \quad n_{y_j} = n_{1j} + n_{2j} + \ldots + n_{kj} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij};$$

$$n = n_{x_1} + n_{x2} + \ldots + n_{x_k} = \sum_{i=1}^{k} n_{x_i} \text{ или } n = n_{y_1} + n_{y_2} + \ldots + n_{y_m} = \sum_{j=1}^{m} n_{y_j}.$$

Условные средние по x: $\overline{y}_{x=x_l} = \dfrac{y_1 n_{l1} + y_2 n_{l2} + \ldots + y_m n_{lm}}{n_{l1} + n_{l2} + \ldots + n_{lm}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} y_j n_{lj}}{n_{x_l}}$.

Условные средние по y: $\overline{x}_{y=y_t} = \dfrac{x_1 n_{1t} + x_2 n_{2t} + \ldots + x_k n_{kt}}{n_{1t} + n_{2t} + \ldots + n_{kt}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_{it}}{n_{y_t}}$.

§36. Виды уравнений регрессии

Вид регрессии	Уравнение регрессии	Сведение к линейному виду
1. Линейная	$\overline{y}_x = ax + b$ $\overline{x}_y = cy + d$	

2. Гиперболическая	$\overline{y}_x = a + \dfrac{b}{x}$	$t = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{y}_x = a + bt$
3. Показательная	$\overline{y}_x = ab^x$	$\ln \overline{y}_x = \ln a + x \ln b$ $\left.\begin{array}{l} \ln \overline{y}_x = Y \\ \ln a = A \\ \ln b = B \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y = A + Bx$

Вид регрессии	Уравнение регрессии	Сведение к линейному виду
4. Степенная	$\overline{y}_x = ax^b$	$\ln \overline{y}_x = \ln a + b \ln x$ $\left.\begin{array}{l} \ln \overline{y}_x = Y \\ \ln a = A \\ \ln x = X \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y = A + bX$
5. Параболическая	$\overline{y}_x = a\sqrt{x} + b$	$t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{y}_x = at + b$
6. Параболическая	$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$	к линейной не сводится

В случаях 1–5 параметры линейной зависимости находятся по формулам, указанным в следующем параграфе. Для случая 6 применяется непосредственно метод наименьших квадратов.

Пример. Дана таблица

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0,25	0,37	0,44	0,55	0,60	0,62	0,68	0,70	0,73
Y	2,57	2,31	2,12	1,92	1,75	1,71	1,60	1,51	1,50

i	10	11	12	13	14	15	16	17
X	0,75	0,82	0,84	0,87	0,88	0,90	0,95	1,00
Y	1,41	1,33	1,31	1,25	1,20	1,19	1,15	1,00

Определить коэффициент корреляции r_{xy} и уравнения линий регресии.

Решение. Составим расчётную таблицу:

i	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	0,25	2,57	0,0625	6,6049	0,6425
2	0,37	2,31	0,1369	5,3361	0,8547
3	0,44	2,12	0,1936	4,4944	0,9328
4	0,55	1,92	0,3025	3,6864	1,0560
5	0,60	1,75	0,3600	3,0625	1,0500

6	0,62	1,71	0,3844	2,9241	1,0602
7	0,68	1,60	0,4624	2,5600	1,0880
8	0,70	1,51	0,4900	2,2801	1,0570
9	0,73	1,50	0,5329	2,2500	1,0950
10	0,75	1,41	0,5625	1,9881	1,0575
i	*X*	*Y*	X^2	Y^2	*XY*
11	0,82	1,33	0,6724	1,7689	1,0906
12	0,84	1,31	0,7056	1,7161	1,1004
13	0,87	1,25	0,7569	1,5625	1,0875
14	0,88	1,20	0,7744	1,4400	1,0560
15	0,90	1,19	0,8100	1,4161	1,0710
16	0,95	1,15	0,9025	1,3225	1,0925
17	1,00	1,00	1,0000	1,0000	1,0000
Σ	11,95	26,83	9,1095	45,4127	17,3917

Из таблицы получаем: $\sum_{i=1}^{17} x_i = 11,95,\ \ \sum_{i=1}^{17} y_i = 26,83,$

$\sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 9,1095,\ \ \sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 9,1095,\ \ \sum_{i=1}^{17} y_i^2 = 45,4127,\ \ \sum_{i=1}^{17} x_i y_i = 17,3917.$

Теперь находим

$$\bar{x} = 11,95/17 = 0,7029,\ \ \bar{y} = 26,83/17 = 1,5782;$$

$$\sigma_x^2 = 9,1095/17 - (0,7029)^2 = 0,0418,\ \ \sigma_x = 0,2042,$$

$$\sigma_y^2 = 45,4127/17 - (1,5782)^2 = 0,1806,\ \ \sigma_y = 0,4250;$$

$$C_{xy} = 17,3917/17 - 0,7029 \cdot 1,5782 = -0,0863;$$

$$r_{xy} = (-0,0863)/(0,2042 \cdot 0,4250) = -0,9943.$$

Вычисляем значение произведения $|r_{xy}|\sqrt{n-1};$ так как

$|r_{xy}|\sqrt{n-1} = 0,9943 \cdot 4 = 3,9772 > 3,$ то связь достаточно обоснована.

Уравнения линий регрессии:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x}),$$

т.е. $\overline{y}_x - 1,5782 = -\dfrac{0,9943 \cdot 0,4250}{0,2042}(x - 0,7029);$

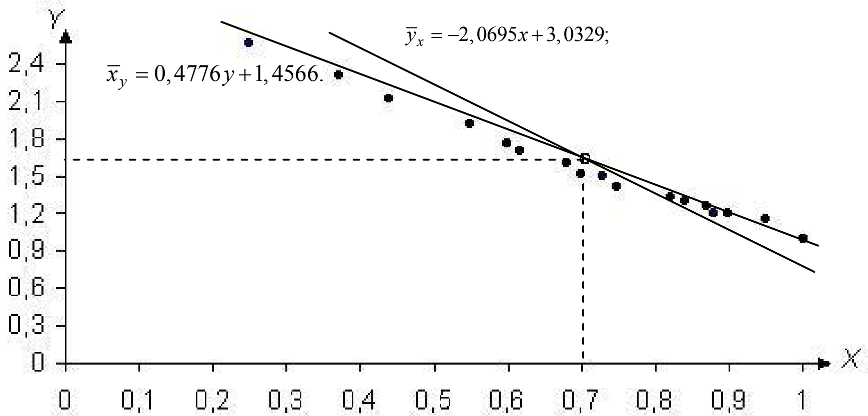
$$\overline{y}_x = -2,0695x + 3,0329;$$

$$\overline{x}_x - \overline{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (y - \overline{y}),$$

т.е. $\overline{x}_y - 0,7029 = -\dfrac{0,9943 \cdot 0,2042}{0,4250}(y - 1,5782);$

$$\overline{x}_y = 0,4776y + 1,4566.$$

Построив точки, определяемые таблицей, и линии регрессии, видим, что обе линии регрессии проходят через точку $M(0,7029;\ 1,5782)$. Первая линия отсекает на оси ординат отрезок 3,0329, а вторая – на оси абсцисс отрезок 1,4566. Точки (x_i, y_i) расположены близко к линиям регрессии.



§37. Метод наименьших квадратов

Служит для нахождения параметров уравнения регрессии. Пусть даны соответствующие значения рассматриваемых признаков X и Y:

x_i	x_1	x_2	…	x_k

y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_k

Подберём функцию $y = f(x)$, наилучшим образом отражающую зависимость между признаками X и Y.

Подставляя x_i в функцию, получим теоретическое значение Y (обозначим $y_i^{\text{т}}$):

$y_i^{\text{т}} = f(x_i)$.

$(y_i^{\text{т}} - y_i)$ – отклонения теоретических значений $y_i^{\text{т}}$ от эмпирических значений y_i.

Суть метода наименьших квадратов: параметры выбранной функции $y = f(x)$ находят так, чтобы сумма квадратов отклонений теоретических значений от эмпирических была наименьшей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i^{\text{т}} - y_i)^2 \to \min.$$

Нахождение параметров уравнения линейной регрессии:

$$y = ax + b.$$

1. Из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

2. $a = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x^2}$; $b = \overline{y} - a\overline{x}$, где $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$.

3. $y - \overline{y} = R \cdot \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$, где $R = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$.

§38. Показатели тесноты корреляционной связи

H – корреляционное отношение (для линейной и нелинейной связи).
R – коэффициент корреляции (только для линейной связи).
Свойства:

R	$H = H_{y/x}$
1. $\lvert R \rvert \le 1$ или $-1 \le R \le 1$.	1. $0 \le H \le 1$.
2. $R = 0 \Rightarrow X$ и Y не связаны линейной зависимостью (эта зависимость может быть нелинейной).	2. $H = 0 \Rightarrow Y$ не связано с X.

R	$H = H_{y/x}$
3. $\mid R \mid = 1$, т.е. $R = \pm 1 \Rightarrow$ X и Y связаны функциональной зависимостью. Если $R > 0$, то связь прямая, т.е. с ростом X растёт Y. Если $R < 0$, то связь обратная, т.е. с ростом X убывает Y.	3. $H = 1 \Rightarrow$ Y связано с X функциональной зависимостью.
4. Чем $\mid R \mid$ ближе к единице, тем линейная корреляционная связь теснее.	4. Чем ближе H к единице, тем корреляционная связь теснее.

Всегда $H \geq |R|$.

Шкала Чаддока

$\mid R \mid, H$	(0; 0,3)	[0,3; 0,5)	[0,5; 0,7)	[0,7; 0,9)	[0,9; 1)
теснота связи	слабая	умеренная	заметная	высокая	весьма высокая

Формулы для вычислений: $R = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$; $H = \dfrac{\sigma_{\text{межгр.}}}{\sigma_{\text{общ.}}}$.

1. $H_{y/x}$ – корреляционное отношение y к x, где

$$\sigma^2_{\text{межгр.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\overline{y}_{xi} - \overline{y})^2 n_{xi}}{n}$$ – межгрупповая дисперсия, характеризует разброс условных средних $\overline{y}_{xi}$ от общей средней $\overline{y}$, $\sigma^2_{\text{общ.}} = \sigma^2_y$ – общая дисперсия, характеризует разброс фактических данных y_i от их общей средней $\overline{y}$.

2. $H_{x/y}$ – корреляционное отношение x к y, где

$$\sigma^2_{\text{межгр.}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} (\overline{x}_{yj} - \overline{x})^2 n_{yj}}{n}$$ – межгрупповая дисперсия, характеризует разброс условных средних $\overline{x}_{xi}$ от общей средней $\overline{x}$, $\sigma^2_{\text{общ.}} = \sigma^2_x$ – общая дисперсия, характеризует разброс фактических данных x_j от их общей средней $\overline{x}$.

§39. Пример составления уравнения линейной регрессии и оценки тесноты корреляционной связи

Пусть X – оценка студента по математике в школе, Y – оценка по математике в первом семестре.
В результате опроса составлена следующая корреляционная таблица:

$x \backslash y$	2	3	4	5	n_x
3	–	1	–	–	1
4	4	26	25	5	60
5	–	12	22	19	53
n_y	4	39	47	24	$n = 114$

Оценить тесноту корреляционной связи между X и Y, вычислив коэффициент корреляции R. Составить уравнение линейной регрессии Y по X.

Решение. Для вычисления R найдём $\overline{x}, \overline{y}, \overline{xy}, \overline{x^2}, \overline{y^2}, \sigma_x, \sigma_y$.

Общие средние: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_{x_i}}{n} = \dfrac{3\cdot 1 + 4\cdot 60 + 5\cdot 53}{114} = \dfrac{508}{114} \approx 4{,}46;$

$$\overline{y} = \frac{\sum y_j n_{y_j}}{n} = \frac{2\cdot 4 + 3\cdot 39 + 4\cdot 47 + 5\cdot 24}{114} = \frac{433}{114} \approx 3{,}80;$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum\sum x_i y_j n_{ij}}{n} = \frac{2\cdot 4\cdot 4 + 3\cdot 3\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 26 + 3\cdot 5\cdot 12 + 4\cdot 4\cdot 25 + 4\cdot 5\cdot 22}{114} +$$

$$+\frac{5\cdot 4\cdot 5 + 5\cdot 5\cdot 19}{114} = \frac{1948}{114} \approx 17{,}09;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2 n_{x_i}}{n} = \frac{3^2\cdot 1 + 4^2\cdot 60 + 5^2\cdot 53}{114} = \frac{2294}{114} \approx 20{,}12;$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y_j^2 n_{y_j}}{n} = \frac{2^2\cdot 4 + 3^2\cdot 39 + 4^2\cdot 47 + 5^2\cdot 24}{114} = \frac{1719}{114} \approx 15{,}08;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = \sqrt{15{,}08 - 3{,}80^2} \approx 0{,}81;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{20{,}12 - 4{,}46^2} \approx 0{,}52;$$

$$R = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{17{,}09 - 4{,}46\cdot 3{,}80}{0{,}52\cdot 0{,}81} \approx 0{,}39 \quad \Rightarrow \text{ линейная связь умеренная.}$$

$\overline{y}_x = ax + b$ – уравнение линейной регрессии Y по X.

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x^2} = \frac{17{,}09 - 4{,}46\cdot 3{,}80}{0{,}52^2} \approx 0{,}61; \quad b = \overline{y} - a\overline{x} = 3{,}80 - 0{,}61\cdot 4{,}46 \approx 1{,}08;$$

$$\overline{y}_x = 0{,}61x + 1{,}08.$$

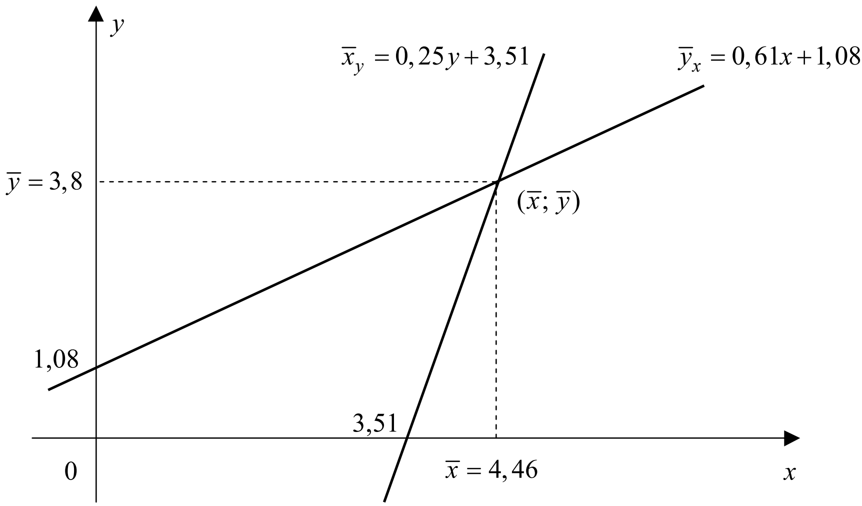
Это уравнение выражает зависимость средней оценки по математике в первом семестре от оценки в школе.

Аналогично, $\overline{x}_y = cy + d$ – уравнение регрессии X по Y.

$$c = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_{yx}^2} = \frac{17,09 - 4,46 \cdot 3,80}{0,81^2} \approx 0,25; \quad d = \overline{x} - c\overline{y} = 4,46 - 0,25 \cdot 3,80 = 3,51.$$

Тогда, $\overline{x}_y = 0,25y + 3,51.$

Построим прямые регрессии Y по X и X по Y. Они всегда проходят через точку $(\overline{x};\, \overline{y})$.



Чем теснее связь между признаками X и Y, тем ближе друг к другу расположены прямые регрессии (угол между ними мал). Прямые совпадают, если связь между X и Y функциональная.

Индивидуальное задание

Задача №1

1. В водоёме из 10 самок карпа чешуйчатых 8, а из 20 самцов чешуйчатых 12. Какова вероятность чешуйчатой пары при условии случайного скрещивания?

2. Из двух колод по 36 карт наудачу выбирают по одной карте. Какова вероятность того, что обе карты красные?

3. Бросаются 3 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не больше 4?

4. В популяции дрозофил из 20 самцов 15 имеют серую окраску, 5 – чёрную, а из 15 самок 12 имеют серую окраску, 3 – чёрную. Предполагая скрещивание случайным, найти вероятность чёрной пары.

5. В среднем из 10 женихов 2 и из 10 невест 1 имеют отрицательный резус-фактор. Какова вероятность "отрицательной" пары при случайном выборе?

6. Среди 10 самцов плодовой мушки 7 имеют мутацию глаз, а среди 10 самок – 8 имеют мутацию крыльев. Какова вероятность того, что случайно выбранная для скрещивания пара не имеет мутаций?

7. В первом аквариуме 3 рыбки с золотистой окраской и 5 с красной, во втором – 4 с золотистой и 3 с красной. Случайным образом отлавливают по одной рыбке из каждого аквариума. Какова вероятность того, что обе окажутся золотистыми?

8. В одной колоде 3 красных и 7 чёрных карт, в другой – 5 красных и две чёрных. Вытаскивают наудачу по одной карте из каждой колоды. Какова вероятность того, что обе карты чёрные?

9. В одном стручке гороха 4 горошины сморщенные и 4 гладкие, а в другом 3 сморщенные и 4 гладкие. Выбирают по одной горошине из каждого стручка. Какова вероятность того, что обе горошины гладкие?

10. Человек забыл начало и конец телефонного номера, но помнил, что первая цифра номера от 1 до 6, а последняя от 7 до 9. Какова вероятность наудачу набрать номер верно?

11. В первой партии из 10 цыплят 6 курочек, во второй – 5. Какова вероятность, случайно выбирая по одному цыплёнку из партии, выбрать двух курочек?

12. Врач назначил больному один из трёх сульфаниламидов и один из пяти антибиотиков, но больной забыл, какие именно. Какова вероятность того, что при случайном выборе больной выпьет нужные лекарства?

13. В одном ящике находятся луковицы 5 красных и 5 желтых тюльпанов, в другом – 7 красных и 3 жёлтых. Взяли по одной луковице из каждого ящика и посадили. Какова вероятность того, что вырастут 2 красных тюльпана?

14. Два игрока бросают игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10?

15. Из 200 кур 50 белых, 100 красных и 50 полосатых, из 25 петухов 6 белых, 14 красных и 5 полосатых. Предполагая, что скрещивание происходит случайно, найти вероятность белой пары.

16. В популяции диких кроликов в среднем из 100 самцов 10 имеют черную окраску, 5 – коричневую, а остальные – обыкновенную пятнистую, аналогично распределяются по окраске самки. Считая, что скрещивание происходит случайно, найти вероятность чёрной пары при скрещивании 100 самцов и 100 самок.

17. Колода из 36 карт разложена по мастям. Из каждой масти выбирают по одной карте. Какова вероятность того, что все 4 карты одинаковые?

18. Карточки с буквами разложены в три коробки. В первой коробке находятся буквы А, Б, В, Г, Д, во второй – Е, Ж, 3, И, К, в третьей – Л, М, Н, О, П, Р, С. Вытаскивают по одной карточке из каждой коробки и складывают. Какова вероятность получить слово ГЕН?

19. В одном гнезде находится 3 яичка, из которых вылупятся самки и 4 из которых вылупятся самцы, в другом гнезде – соответственно 3 и 5. Из каждого гнезда случайным образом выбирают по яичку. Какова вероятность того, что из этих яиц вылупятся самки?

20. Имеется 5 пробирок с пятью штаммами одного вида бактерий и 4 пробирки с 4 штаммами другого вида. Для эксперимента нужно выбрать 1 штамм первого вида и 1 – второго. Какова вероятность правильного выбора, если на пробирках указаны виды, но забыли указать номера штаммов?

21. Для проведения реакции нужно взять одну из трёх кислот и одну из четырёх щелочей. Какова вероятность правильно выбрать реактивы при случайном выборе?

22. На ферме имеется 5 тёлочек и 4 бычка. Одна тёлочка и один бычок – близнецы. Какова вероятность выбрать близнецов при случайном выборе бычка и тёлочки?

23. В одной конюшне 2 серых и 3 вороных лошади, в другой – 3 серых и 1 вороная. Какова вероятность, выбирая по одной лошади из каждой конюшни, составить одномастную пару?

24. Выбирают по одному семени из 10 семян первого сорта и 10 семян второго сорта. Известно, что из 10 семян первого сорта всходит 8, а из 10 семян второго сорта – 7. Какова вероятность того, что выбранные 2 семени взойдут?

25. Четыре невесты с группами крови от первой до четвёртой выходят замуж за четырёх женихов с группами крови от первой до четвёртой. Какова вероятность пар с одинаковой группой крови?

26. Для случайного скрещивания отобраны 10 самцов дрозофил, среди которых 3 имеют мутацию крыльев, 2 – мутацию глаз, а остальные 5 не имеют мутаций, и 8 самок дрозофил, среди которых 4 имеют мутацию крыльев и 4 не имеют никаких мутаций. Какова при этом вероятность пары без мутаций?

27. В трёх клетках содержалось по паре мышей в каждой: одна белая, а одна серая. Однажды клетки забыли запереть, и мыши разбежались по лаборатории. Их поймали и снова посадили в клетки: по одной белой и одной серой. Какова вероятность того, что в первой клетке оказалась прежняя пара?

28. Гладкость семян гороха определяется доминантным геном *R,* морщинистость – рецессивным аллелем *r.* Жёлтая окраска определяется доминантным геном *Y*, зелёная рецессивным аллелем *y.* Найти вероятность того, что при скрещивании гетерозигот (*Rr*, *Yy)* между собой появится плод морщинистый и зелёный, которому соответствует гетерозигота (*rr*, *yy*).

Указание: при скрещивании гетерозигот *Rr* мы предполагаем равновероятность образования четырёх типов зигот *RR, Rr, rR, rr.* Аналогично для *Yy.*

29. В первой части курса из 20 вопросов студент знает 15, во второй части – из 10 знает 5. Какова вероятность того, что студент ответит на произвольные 2 вопроса, один из которых из первой части, а другой из второй?

30. В одной урне 3 белых шара и 5 красных, в другой – 4 белых и 2 красных. Из каждой урны случайным образом выбирают по одному шару. Какова вероятность того, что шары одинакового цвета?

Задача №2

1. В коробке 15 луковиц гладиолусов, из которых 7 луковиц красных гладиолусов, 8 луковиц чёрных. Какова вероятность того, что из 10 наудачу выбранных луковиц 6 окажутся луковицами чёрных гладиолусов?

2. Из 12 луковиц, среди которых 5 луковиц красных тюльпанов и 7 жёлтых, наудачу выбирают 4. Какова вероятность того, что из них вырастут два красных и два жёлтых тюльпана?

3. В помёте 2 рыжих щенка и 5 черных. Наудачу выбирают 3 щенков. Какова вероятность того, что один из них рыжий?

4. Из 12 крыс 8 получили некоторую дозу облучения. Какова вероятность того, что из 6 наудачу выбранных крыс 4 облучены?

5. В популяции из 30 плодовых мушек 10 имеют красные глаза. Наудачу выбирают 3 мушек. Какова вероятность того, что одна из них имеет красные глаза?

6. В 15 пакетиках находится пыльца, собранная с 15 цветков гороха, из которых 5 красные, а остальные белые. Наудачу выбирают 3 пакетика. Какова вероятность того, что в двух из них пыльца красных цветов?

7. Среди 12 цыплят 5 курочек. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу 4 цыплят 2 курочки?

8. Из данных 20 мужчин 1 страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что при случайном выборе 10 мужчин из этих 20 один страдает дальтонизмом?

9. Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что 3 из них красные?

10. Из 15 провакцинированных мышей у 12 сформировался иммунитет. Какова вероятность того, что из 5 случайно выбранных из группы вакцинированных мышей 4 имеют иммунитет?

11. На ферме из 12 коров 3 больные. Какова вероятность того, что из 4 выбранных наудачу коров 1 больная?

12. Из 15 арбузов 3 неспелых. Какова вероятность того, что из 3 выбранных арбузов 2 спелых?

13. Из 9 лабораторных мышей 7 вакцинированы. Какова вероятность того, что из 5 наудачу выбранных мышей 3 вакцинированы?

14. Среди 10 доноров 4 имеют первую группу крови. Какова вероятность того, что из 2 наудачу выбранных доноров один имеет первую группу крови?

15. Среди 15 цветных мышей 10 имеют генотип (Сс), а 5 – генотип (СС). Какова вероятность того, что из 3 выбранных мышей 2 имеют генотип (Сс)?

16. В аквариуме из 12 рыбок 4 золотых. Какова вероятность того, что из случайно отловленных 3 рыбок 1 золотая?

17. Среди 10 одинаковых пробирок без этикеток 4 пробирки со штаммом типа «А» и 6 со штаммом типа «В». Какова вероятность того, что из 3 случайно выбранных пробирок 2 со штаммом «А»?

18. В питомнике из 10 обезьян 2 имеют отрицательный резус-фактор. Какова вероятность, что из 4 наудачу выбранных обезьян 1 имеет отрицательный резус-фактор?

19. Среди 6 котят 2 кота. Какова вероятность того, что из 2 выбранных наудачу котят 1 кот?

20. Из 10 ответов к задачам, помещенным на данной странице, 2 имеют опечатки. Студент решает 5 задач. Какова вероятность того, что к одной из них ответ дан с опечаткой?

21. Среди 12 мышей 8 короткохвостых. Наудачу выбирают 3 мыши. Какова вероятность того, что 2 из них короткохвостые?

22. Среди 20 плодовых мушек 5 не имеют щетинок. Какова вероятность того, что из 4 случайно отловленных мушек 2 без щетинок?

23. Среди 7 коров 5 имеют рецессивный летальный ген. Какова вероятность того, что из 3 наудачу выбранных коров 2 не имеют летального гена?

24. Среди 20 мышат 5 карликовых, т.е. прекращающих расти к концу второй недели. Наудачу выбрали 6 мышат. Какова вероятность того, что 2 из них карликовые?

25. Из 10 обследованных больных у 3 встретился ген S серповидно-клеточной анемии. Какова вероятность того, что из 4 случайно выбранных из этой группы больных 2 не имеют гена S?

26. Среди 20 листьев табака 5 поражены мозаичной болезнью. Какова вероятность того, что из 4 наудачу выбранных листьев 1 будет поражён мозаичной болезнью?

27. Из 15 клубней картофеля 3 мороженых. Наудачу выбирают 4 клубня. Какова вероятность того, что один из них мороженый.

28. Из 10 мышей половина получает рацион с повышенным содержанием белка. Какова вероятность того, что на 7 наудачу отобранных мышей 4 получают рацион с повышенным содержанием белка?

29. В 5 из 9 пробирок находиться раствор кислоты, в остальных раствор щелочи. Какова вероятность того, что из 3 наудачу выбранных пробирок 2 с кислотой?

30. В группе из 14 животных 8 получают лечение, а 6 (контрольных) не получает. Какова вероятность того, что на 10 наудачу отобранных животных 4 контрольных?

Задача №3

1. Студент пришёл на экзамен, зная лишь 50 из 60 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

2. Многолетними наблюдениями в данном районе установлено, что вероятность сентябрьскому дню быть дождливым равна 1/3. Совхоз должен в течение 3 дней сентября выполнить определённую работу. Чему равна вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым?

3. Вероятность повреждения кочанов капусты при погрузке на автомашину равна 0,05; вероятность повреждения при транспортировке на машине равна 0,02; вероятность повреждения при разгрузке машины – 0,04. Определить вероятность того, что кочаны капусты будут доставлены в овощехранилище без повреждений.

4. При транспортировке винограда из каждых 100 ящиков один оказывается с испорченным виноградом. Определить вероятность того, что из 3 ящиков с виноградом, поступивших в овощной киоск, ни в одном не будет испорченного винограда.

5. Найти вероятность того, что яблоки во взятом наудачу со склада ящике будут первого сорта, если ящики с яблоками первого сорта составляют 70% всех ящиков с доброкачественными яблоками, а процент ящиков с недоброкачественными яблоками равен 80.

6. Вероятность того, что приживётся саженец груши – 0,7, яблони – 0,8. Посадили по одному саженцу яблони и груши. Найти вероятность того, что оба саженца приживутся.

7. Вероятность пятилетней службы каждой из 4 деталей зерноуборочного комбайна равна соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,9. Определить вероятность того, что комбайн в целом прослужит 5 лет.

8. Определить вероятность того, что при трёхкратном бросании игральной кости ни разу не выпадет одно очко.

9. Определить вероятность того, что при одновременном бросании трёх игральных костей на каждой из них появится 6 очков.

10. Из множества семей, имеющих двух детей, выбрана одна семья. Если принять, что вероятности рождения мальчиков и девочек равны, то какова вероятность того, что в этой семье два мальчика, если известно, что в ней есть один мальчик?

11. На предприятии брак составляет 2% от общего выпуска изделий. Среди годных изделия отличного качества составляют 80%. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется отличного качества?

12. На поле работают два трактора. Вероятность того, что первый тракторист выполнит норму вспашки, равна 0,8, а второй 0,85. Какова вероятность того, что оба тракториста выполнят норму вспашки, если они работают независимо друг от друга?

13. Из множества семей, имеющих двух детей, выбрана одна семья. Если принять, что вероятности рождения мальчиков и девочек равны, то какова вероятность того, что в этой семье два мальчика, если известно, что старший ребенок – мальчик?

14. Вероятность того, что приживётся саженец груши – 0,7, яблони – 0,8. Посадили по одному саженцу яблони и груши. Найти вероятность того, что не приживётся ни один саженец.

15. Студент изучает химию, математику и биологию. Он оценивает, что вероятность получить «5» по этим курсам равна соответственно 1/2, 1/3, 1/4. В предположении, что оценки студента по трём курсам независимы, найти вероятность того, что он не получит ни одной «пятёрки».

16. В партии из 50 электрических лампочек имеется 3 нестандартных. Найти вероятность того, что две последовательно взятые одна за другой лампочки окажутся нестандартными.

17. Зерно для посева подвергалось трём очисткам. Известно, что вероятность прохождения сорняков через первую очистку равна 0,2, через вторую – 0,1, через третью – 0,05. Какова вероятность прохождения сорняков через все три очистки?

18. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4% всей продукции – брак, а 75% доброкачественных изделий – первосортные.

19. От аэровокзала отправились два автобуса-экспресса к трапам самолётов. Вероятность своевременного прибытия равна для каждого 0,97. Найти вероятность того, что оба автобуса придут вовремя.

20. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Найти вероятность того, что они оба выздоровеют.

21. При транспортировке винограда из каждых 100 ящиков 5 оказывается с испорченным виноградом. Найти вероятность того, что из двух взятых наудачу ящиков виноград испорчен в обоих.

22. От аэровокзала отправились два автобуса-экспресса к трапам самолётов. Вероятность своевременного прибытия равна для каждого 0,98. Найти вероятность того, что оба автобуса опоздают.

23. Найти вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

24. Какова вероятность того, что из колоды в 36 игральных карт будут подряд вынуты 2 туза?

25. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,7. Стрелки сделали по одному выстрелу по цели. Найти вероятность того, что цель не будет поражена.

26. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в августе равно 9. Найти вероятность того, что первого и второго августа будет ясная погода.

27. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на обеих костях выпадут шестёрки?

28. В одном ящике 4 чёрных и 8 белых шаров. В другом ящике 3 чёрных и 12 белых шаров. Из каждого ящика наугад извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара белые.

29. Вероятности того, что на экзамене студент ответит на первый и второй вопросы, равны 0,7, а на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на все три вопроса и результат ответа на любой из вопросов не влияет на результаты ответов на другие вопросы.

30. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,9. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если стрелки сделали по одному выстрелу по цели.

Задача №4

1. При транспортировке винограда из каждых 100 ящиков 4 оказываются с испорченным виноградом. Найти вероятность того, что из 2 поступивших в продажу ящиков хотя бы в одном не будет испорченного винограда.

2. Студент может найти нужную ему формулу в одном справочнике с вероятностью 0,7 и во втором справочнике с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что формула будет найдена хотя бы в одном из них.

3. На 2 фермах произошла вспышка заболевания ящуром. Доли заражённого скота составляют соответственно 1/6 и 1/4. На каждой ферме случайным образом выбирают по одной корове. Какова вероятность того, что хотя бы у одной из них имеется заболевание ящуром.

4. Вероятность того, что на зачёте студент решит задачу из первого раздела, равна 0,9, из второго – 0,75. В предположении, что эти разделы независимы, найти вероятность того, что студент сдаст зачёт, если для этого нужно решить хотя бы одну из 2 предложенных ему задач разных разделов.

5. В популяции дрозофилы у 20% особей имеется мутация крыльев. Если из популяции выбирают наугад две особи, то какова вероятность того, что хотя бы у одной из них не будет мутации крыльев.

6. От аэровокзала отправились два автобуса к трапам самолётов. Вероятности прибытия равны для каждого 0,95. Найти вероятность того, что вовремя придёт хотя бы один автобус.

7. Всхожесть семян огурцов равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух посаженых семян хотя бы одно не взойдёт.

8. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет карта пиковой масти или туз.

9. Какова вероятность выпадения «5» или «6» при однократном бросании игральной кости?

10. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность в темноте сорвать не синюю астру.

11. Для одного стрелка вероятность выбить 10 очков за один выстрел равна 0,1, вероятность выбить 9 очков – 0,3, 8 и менее очков – 0,6. Найти вероятность того, что за один выстрел стрелок выбьет не менее 9 очков.

12. Двое друзей пришли в кинотеатр к началу сеансов. Можно было купить билеты в «большой» зал с вероятностью 0,2 и в «малый» зал с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что друзья попали в кино?

13. Вероятность прижиться саженцу яблони одного сорта равна 0,85, другого – 0,7. Найти вероятность того, что из 2 саженцев разных сортов хотя бы один не приживётся.

14. При стрельбе по мишени для одного стрелка вероятность сделать выстрел на «отлично» равна 0,3, на «хорошо» 0,4. Какова вероятность для этого стрелка получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

15. Монета бросается два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «герб».

16. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «шестёрка».

17. Всхожесть семян гороха равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух посаженых горошин хотя бы одна взойдёт.

18. При опоросе свиноматка приносит от 7 до 12 поросят. Вероятность рождения 7 поросят равна 0,13, восьми – 0,19, девяти – 0,22, десяти – 0,25, одиннадцати – 0,12. Какова вероятность того, что взятая наудачу свиноматка принесёт не менее 10 поросят?

19. В среднем в колосе твёрдой пшеницы бывает от 15 до 20 колосков, причём вероятность нахождения в колосе 15 колосков равна 0,15, 16 колосков – 0,2, 17 колосков – 0,3, 18 колосков – 0,15, 19 колосков – 0,12. Какова вероятность того, что взятый наудачу колос содержит не менее 18 колосков? (Колоском называется один слой зёрен колоса).

20. Вероятность невыхода в рейс автомашины из-за неявки на работу водителя равна 0,03, а из-за неисправности автомашины – 0,2. Определить вероятность невыхода автомашины в рейс.

21. Вероятность простоя комбайна в течение смены из-за разладки равна 0,1, из-за неподвоза горючего – 0,2. Определить вероятность простоя комбайна в течение смены.

22. Вероятность повреждения клубней картофеля вследствие уборки его картофелеуборочным комбайном равна 0,05. Вероятность повреждения вследствие транспортировки и разгрузки равна 0,01. Определить вероятность повреждения клубней.

23. В пакете с семенами перемешаны семена белых, розовых и красных гвоздик. Известно, что 20% из них – семена белых гвоздик, а 40% – красных. Найти вероятность того, что из наудачу взятого семени взойдёт не красная гвоздика.

24. Посадили по одному саженцу яблони и груши. Вероятность того, что приживётся саженец яблони, равна 0,9, саженец груши – 0,8. Найти вероятность того, что приживётся хотя бы один саженец.

25. 21% яблок поступает на базу из совхоза №1, 35% яблок – из совхоза №2, 29% – из колхоза №1, 15% – из колхоза №2. Найти вероятность того, что наудачу взятый ящик яблок поступил из совхоза.

26. 20% яблок поступает на базу из совхоза №1, 25% яблок – из совхоза №2, 30% – из колхоза №1, 25% – из колхоза №2. Найти вероятность того, что наудачу взятый ящик яблок поступил из колхоза.

27. Вероятность того, что первый студент решит предложенную задачу – 0,85, а вероятность того, что второй студент решит ту же задачу – 0,9. Найти вероятность того, что задача будет решена, если студенты решают её независимо друг от друга.

28. Вероятность выполнения обязательств одной бригадой равна 0,9, другой – 0,95. Найти вероятность того, что хотя бы одна из бригад выполнит свои обязательства, если они работают независимо друг от друга.

29. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 99%. Найти вероятность того, что, по крайней мере, один из них не выздоровеет.

30. По оценкам, волк, нападающий в одиночку на лося, добивается успеха в 8% столкновений. Какова вероятность того, что в 2 столкновениях ни один лось не станет добычей волка?

Задача №5

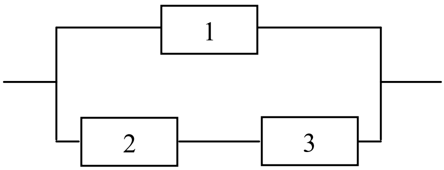
1. Три стрелка выстрелили по мишени. При одном выстреле вероятность попадания для них 0,5; 0,7 и 0,9 соответственно. Найти вероятность, что мишень поражена не менее двух раз.

2. Для контроля за работой линии установлены три независимо работающих устройства, которые срабатывают при аварии с вероятностью 0,8; 0,9 и 0,95 соответственно. Найти вероятность, что при аварии сработает два устройства.

3. Из трёх орудий производят залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле для первого орудия равна 0,9, а для второго и третьего – соответственно 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадёт в цель.

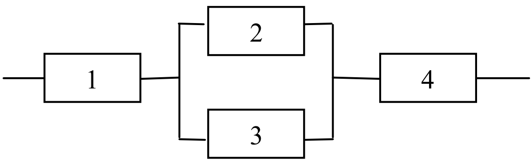
4. В урне 2 белых, 3 чёрных и 5 красных шаров. Наугад извлекают три шара. Найти вероятность, что они одного цвета.

5. Электрическая цепь составлена по схеме



Элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга с вероятностью 0,2; 0,1; 0,3 соответственно. Найти вероятность, что цепь будет пропускать ток.

6. Электрическая цепь составлена по схеме



Элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга с вероятностью 0,1; 0,4; 0,5; 0,2 соответственно. Найти вероятность, что цепь будет пропускать ток.

7. Из 5 ключей к замку подходит один. Ими пытаются открыть дверь, откладывая не подошедшие ключи в сторону. Найти вероятность, что для открытия двери потребуется не более трёх попыток.

8. Два стрелка стреляют по очереди, но не более трёх раз каждый. Победителем считается тот, кто первым попадёт в мишень. При одном выстреле они попадают в мишень с вероятностью 0,9 и 0,8. Найти вероятность, что победит более меткий стрелок, если он начал стрелять первым.

9. В урне 6 белых и 8 чёрных шаров. Взято подряд без возвращения два шара. Найти вероятность, что они одного цвета.

10. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего: первый станок – 0,9; второй – 0,8; третий – 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа два станка потребуют внимания рабочего.

11. В урне 2 белых и 3 чёрных шара. Два игрока вынимают из урны поочередно шары, не возвращая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше извлечёт белый шар. Найти вероятность того, что выиграет начинающий.

12. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка, которые в течение часа требуют его внимания с вероятностью 0,1; 0,1; 0,2 и 0,3 соответственно. Какова вероятность, что в течение часа не более одного станка потребуют одного внимания?

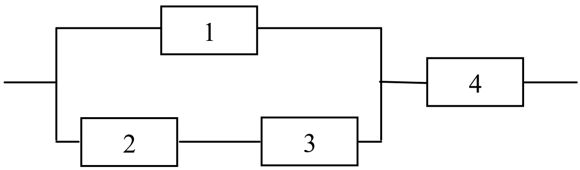
13. Три стрелка выстрелили по мишени по одному разу. Вероятность попадания для них 0,9; 0,8 и 0,7 соответственно. Найти вероятность, что мишень поражена не более одного раза.

14. Стрелок имеет 6 патронов. При одном выстреле он попадает в мишень с вероятностью 0,7. Найти вероятность, что для поражения мишени ему потребуется не более половины патронов.

15. Прибор состоит из трёх элементов. Отказы элементов за некоторое время T независимы, а их вероятности равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,25. Найти вероятность, что за время T откажут два элемента.

16. В урне 5 белых и 4 чёрных шара. Из урны наугад один за другим без возвращения извлекают шары. Найти вероятность того, что второй по порядку шар будет белым.

17. Электрическая цепь составлена по схеме



Элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга с вероятностью 0,1; 0,3; 0,1; 0,2 соответственно. Найти вероятность, что цепь работает.

18. Из пяти деталей выбирают одну годную, проверяя их последовательно. Каждая из деталей имеет дефект с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что годная деталь нашлась раньше, чем проверили все детали.

19. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,5, для второго – 0,8, для третьего – 0,3. Найти вероятность, что в мишени будет две пробоины.

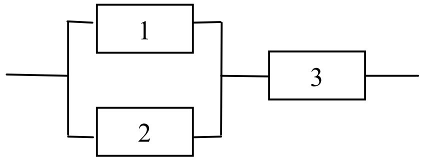
20. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают одну за другой три карты без возвращения. Найти вероятность того, что извлечено не более одного туза.

21. У мальчика имеется 4 монеты, на которые он хочет выпить лимонада. С вероятностью 0,1 автомат глотает монету, не наливая воды. Какова вероятность, что мальчик попьёт, не истратив все монеты?

22. Ученику выдано три заготовки, из которых он должен изготовить деталь. Вероятность того, что он испортит заготовку при обработке, 0,7. Найти вероятность, что ему хватит заготовок для изготовления детали.

23. Студент подготовил к экзамену 30 из 40 вопросов. На экзамене ему выдается два обязательных вопроса. Если он их знает, ему выдаётся два дополнительных вопроса, из которых для сдачи экзамена необходимо ответить хотя бы на один. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

24. Электрическая цепь составлена по схеме



Элементы цепи выходят из строя за время T независимо друг от друга с вероятностью 0,8; 0,6; и 0,9 соответственно. Найти вероятность разрыва всей цепи.

25. Прибор состоит из трёх элементов, которые за время T отказывают с вероятностью 0,1; 0,2 и 0,25 соответственно. Найти вероятность отказа двух элементов за время T.

26. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не более трёх выстрелов.

27. В урне 3 белых и 1 чёрный шар. Наугад один за другим без возвращения извлекают шары до тех пор, пока не появится чёрный. Найти вероятность того, что было проделано не более трёх таких операций.

28. Среди 10 лампочек 3 имеют дефект. Их испытывают одну за другой, причём дефектная лампочка сразу при этом перегорает. Найти вероятность, что для выбора качественной пришлось испытать не более трёх лампочек.

29. Прибор состоит из трёх независимо работающих элементов, которые за время T отказывают с вероятностью 0,1; 0,2 и 0,3 соответственно. Найти вероятность отказа двух элементов за время T.

30. Из колоды в 52 карты последовательно извлекают одну за другой три карты без возвращения в колоду. Найти вероятность того, что извлечена только одна десятка.

Задача №6

5.1. – 5.30. В магазин поступили 2 партии лампочек с двух заводов, причём k_1% с первого завода и k_2% со второго. Известно, что 500 часов работают безотказно каждые n_1 лампочек из 100 первого и n_2 из 100 второго завода. Наудачу из каждой партии выбирают по одной лампочке. 1) Какова, вероятность обнаружить среди них: а) две лампочки, которые проработают по 500 часов; б) две лампочки, которые не проработают по 500 часов; в) только одну лампочку, которая проработает 500 часов; г) хотя бы одну лампочку, которая проработает 500 часов? 2) Найти вероятность, что наудачу взятая лампочка будет лампочкой со второго завода, если она проработала 500 часов.

Номер задачи	n_1	n_2	k_1	k_1
1	80	72	40	60
2	71	78	60	40
3	75	91	30	70
4	72	66	20	80
5	97	84	80	20
6	91	85	70	30
7	84	77	10	90
8	76	94	85	15
9	69	84	45	55
10	60	87	60	40
11	73	83	35	65
12	59	87	25	75
13	93	82	20	80
14	68	77	40	60
15	69	86	55	45
16	92	58	70	30
17	90	89	75	25
18	93	66	15	85
19	67	94	50	50
20	87	68	45	55

Номер задачи	n_1	n_2	k_1	k_1
21	80	66	60	40
22	71	84	35	65
23	75	85	25	75
24	72	77	20	80
25	97	94	40	60
26	91	84	55	45
27	84	87	70	30
28	76	83	75	25
29	69	87	15	85
30	60	82	50	50

Задача №7

1. В семи урнах содержится по 2 белых и два чёрных шара, а в трёх урнах по 7 белых и 3 чёрных шара. Какова вероятность, что из урны, взятой наудачу, будет извлечён белый шар? Найти вероятность, что шар извлечён из урны с 7 белыми и 3 чёрными шарами, если он оказался белым.

2. Станок 30% времени обрабатывает деталь А и 70% – деталь В. При обработке детали А он простаивает 10% времени, а детали В – 15%. Какова вероятность застать станок простаивающим? Найти вероятность, что станок, который застали простаивающим, находился в режиме обработки детали В.

3. Сборщик получает 45% деталей завода №1, 30% – завода №2, остальные – с завода №3. Вероятность того, что деталь первого завода отличного качества – 0,7, для деталей второго и третьего заводов эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти вероятность, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется отличного качества. Какова вероятность, что взятая наудачу деталь, оказавшаяся отличного качества, изготовлена заводом №1?

4. Деталь проходит одну из трёх операции обработки с вероятностью 0,25; 0,35; 0,40 соответственно. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02, на второй – 0,04, а на третьей – 0,05. Найти вероятность получения брака после обработки. Какова вероятность, что деталь прошла третью операцию обработки, если получен брак?

5. По цели производится три выстрела с вероятностью попадания 0,2 при каждом. Вероятность уничтожения цели при одном попадании равна 0,3, при двух попаданиях – 0,6, при трёх – 0,9. Какова вероятность, что было одно попадание, если цель уничтожена?

6. В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров, во второй 5 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, после чего из второй урны извлекается одни шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что из первой во вторую урну был переложен чёрный шар, если извлечённый из второй урны шар оказался белым?

7. В цехе имеются три станка. Вероятность изготовления стандартной детали на первом станке составляет 0,78, на втором – 0,92, на третьем -0,86. Ввиду различного местоположения рабочий выбирает первый станок с вероятностью 0,5, второй – 0,2, третий – 0,3. Найти вероятность, что изготовленная им на выбранном станке деталь окажется нестандартной. Какова вероятность того, что деталь изготавливалась на третьем станке, если она оказалась нестандартной?

8. По команде «огонь» одно из трёх орудий стреляет по мишени. Вероятность попадания для орудии равна соответственно 0,8; 0,8; 0,6. Команда «огонь» подаётся в два раза чаще первому орудию, чем второму и третьему по отдельности. Найти вероятность, что мишень окажется поражённой. Какова вероятность того, что мишень была поражена выстрелом из третьего орудия?

9. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй 3 белых и 5 чёрных. Из первой во вторую перекладывают, не глядя, два шара, после чего из второй урны извлекается шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым. Какова вероятность того, что из первой во вторую урну были переложены чёрный и белый шары, если из второй урны извлечён белый шар?

10. На сборку поступили транзисторы с двух заводов-изготовителей, причём первый завод поставил 30%, остальные – второй. Вероятность отказа для транзистора первого завода 0,1, а второго – 0,15. В блок поставлено два наудачу взятых транзистора. Найти вероятность, что блок неисправен. Какова вероятность, что оба транзистора изготовлены вторым заводом, если блок неисправен? Блок не работает, если дефект имеет хоть один транзистор.

11. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета. Какова вероятность того, что студент сдал экзамен, ответив на вопросы из одного билета?

12. На общий конвейер поступают узлы, изготовленные двумя рабочими. Производительность второго рабочего вдвое больше, чем первого. Вероятность допустить брак для первого рабочего 0,075, а для второго 0,09. Найти вероятность, что поступивший на общий конвейер узел будет иметь брак. Какова вероятность, что узел, оказавшийся бракованным, изготовлен вторым рабочим?

13. Покупатель приобрёл электролампочку. Известно, что в момент покупки партия лампочек содержала 60% продукции местного предприятия и 40% – иногороднего. 500 часов работают безотказно каждые 90 из 100 лампочек местного завода и 80 из 100 иногороднего. Найти вероятность, что купленная лампочка проработает 500 часов. Какова вероятность того, что лампочка, проработавшая 500 часов безотказно, местного производства?

14. Узлы поступают на общий конвейер с двух участков. Вероятность брака узла с первого участка 0,05, со второго – 0,1. Второй участок имеет производительность в полтора раза больше, чем первый. Найти вероятность того, что взятый с конвейера узел окажется годным. Какова вероятность того, что годный узел изготовлен на первом участке?

15. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, переложено два шара в урну, содержащую 4 белых и 4 чёрных шара. Вычислить вероятность вынуть белый шар из второй урны. Какова вероятность, что из первой во вторую урну было переложено 2 чёрных шара, если извлечённый наудачу из второй урны шар оказался белым?

16. Первое орудие четырёхорудийной батареи пристреляно так, что вероятность попадания равна 0,4. Остальные три орудия попадают с вероятностью 0,2. Для поражения цели достаточно одного попадания. Два орудия произвели по выстрелу. Найти вероятность поражения цели. Какова вероятность того, что первое орудие стреляло, если цель оказалась поражённой?

17. Для сигнализации о неполадке в работе автоматической линии используется один индикатор, принадлежащий с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 к одному из трёх типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1,0; 0,75 и 0,4. Найти вероятность, что индикатор срабатывает при неполадке в работе линии. Какова вероятность, что для контроля используется индикатор 1-го типа, если он подал сигнал о произошедшей в работе линии неполадке?

18. Транзистор принадлежит к одной из трёх партий с вероятностями 0,25; 0,5 и 0,25. Вероятность того, что транзистор проработает заданное число часов, для этих партий равна соответственно 0,8; 0,8 и 0,6. Определить вероятность, что транзистор проработает заданное число часов. Какова вероятность того, что проработавший заданное число часов транзистор принадлежит второй партии?

19. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат даёт 80%, остальные – второй. Первый автомат даёт 1% брака, второй – 4%. Найти вероятность, что две проверенные детали окажутся бракованными. Определить вероятность того, что обе проверенные детали, оказавшиеся бракованными, изготовлены первым автоматом.

20. Из 20 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8, 8 – с вероятностью 0,7, 4 – с вероятностью 0,6. и 3 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвёл выстрел. Какова вероятность того, что он промахнётся? Найти вероятность того, что выбран стрелок из группы пяти метких, если он промахнулся.

21. Из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 хорошо, 2 посредственно и 1 плохо. На экзамен вынесено 20 вопросов. Отлично подготовленный студент знает все вопросы, хорошо подготовленный знает 16 вопросов, посредственно – 10, плохо – 5. Найти вероятность, что вызванный наугад студент ответит на три произвольно заданных различных вопроса. Какова вероятность того, что студент, ответивший на три вопроса, подготовлен плохо?

22. Три монтажника ведут сборку однотипных приборов, причём производительность их труда относится как 2:3:5. Вероятности сборки прибора отличного качества у них равны соответственно 0,8; 0,6 и 0,6. Найти вероятность, что взятый наудачу изготовленный ими прибор окажется отличного качества. Какова вероятность того, что прибор изготовлен первым рабочим, если он оказался отличного качества?

23. В первой урне 3 белых и 5 чёрных шаров, во второй 5 белых и 4 чёрных шара, а в третьей урне 2 белых и 3 чёрных шара. Из наугад выбранной урны извлекают один шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что шар извлекался из первой урны, если он оказался белым?

24. На сборку поступают детали с трёх автоматов. Первый автомат делает 20% деталей, второй – 30%, остальные – третий. Первый автомат даёт 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 0,1%. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали. Определить вероятность того, что бракованная деталь поступила на сборку с первого автомата.

25. В первой урне 3 белых и 4 чёрных шара, во второй – 5 белых и 2 чёрных шара. Из выбранной наугад урны достали 2 шара. Найти вероятность, что они оба белые. Какова вероятность, что шары извлекли из второй урны, если они оба белые?

26. Вероятность выхода из строя первого, второго и третьего элементов прибора равна соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Вероятность отказа прибора при выходе из строя элемента равна 0,2, двух элементов – 0,5, трёх – 1. Определить вероятность отказа прибора. Найти вероятность того, что вышел из строя только один элемент, если прибор отказал.

27. Некоторое изделие выпускается двумя заводами. При этом объём продукции второго завода в 1,5 раза превосходит объём продукции первого, доля брака у первого завода 18%, а у второго – 8%. Изделия, выпушенные заводами за одинаковый промежуток времени, перемешали и пустили в продажу. Найти вероятность покупки бракованного изделия. Какова вероятность, что купленное бракованное изделие изготовлено на первом заводе?

28. На рубеж случайно вызывается одни из трёх стрелков. Вероятность вызова первого стрелка равна 0,3, второго – 0,5, а третьего – 0,2. Вероятности попадания для них 0,8; 0,9 и 0,6 соответственно. Найти вероятность, что цель будет поражена. Какова вероятность, что стрелял второй стрелок, если цель поражена?

29. На сборку поступают детали с двух заводов-изготовителей, причём они поставляют их в равном количестве. У первого завода брак составляет 4%, у второго – 3%. Наугад взяли 2 детали. Найти вероятность, что они обе доброкачественные. Какова вероятность, что эти детали изготовлены первым заводом, если они обе доброкачественные?

30. Станок обрабатывает три вида деталей, причём затраты времени распределяются между ними а отношении 1:5:4. При обработке первой детали станок работает с максимальной нагрузкой в течение 70% времени, при обработке второй детали в течение 50%, а третьей – 20% времени. Найти вероятность того, что в случайно выбранный момент времени станок будет работать с максимальной нагрузкой. Какова вероятность того, что работающий с максимальной нагрузкой станок обрабатывает деталь третьего вида?

Задача №8

В задачах **8.1 – 8.30** найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le k$.

1. Ведётся стрельба до первого попадания, но не свыше 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. X – число произведённых выстрелов. $k = 3$.

2. Партия из 20 деталей содержит 4 бракованных. Произвольным образом выбрали 5 деталей. X – число доброкачественных деталей среди отобранных. $k = 2$.

3. У стрелка, вероятность попадания которого в мишень равна 0,65 при каждом выстреле, имеется 5 патронов. Стрельба прекращается при первом же попадании. X – число оставшихся патронов. $k = 3$.

4. Прибор содержит три элемента, вероятности отказов которых за определённое время независимы и равны соответственно 0,15; 0,2 и 0,25. X – число отказавших элементов. $k = 2$.

5. В урне 5 белых и три черных шара. Наудачу один за другим извлекаем шары из урны до появления белого шара. X – число извлечённых чёрных шаров. $k = 3$.

6. На пути автомашины 4 независимых друг от друга светофора, каждый из которых с вероятностью 0,4 запрещает движение. X – число пройденных до первой остановки светофоров. $k = 2$.

7. По мишени одновременно стреляют 3 стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,65; 0,7 и 0,8. X – число попаданий. $k = 1$.

8. В тёмной комнате 7 красных кубиков и 8 синих, неотличимых друг от друга на ощупь. Мальчик вынес три кубика. X – число красных кубиков среди вынесенных. $k = 2$.

9. Производится набрасывание колец на колышек до первого успеха, при этом число всех колец, имеющихся в распоряжении, равно 5. X – число использованных колец, вероятность набрасывания равна 0,25. $k = 2$.

10. Производится выстрел из трёх орудий одновременно по цели с вероятностями попадания 0,5; 0,6 и 0,7 для каждого орудия. X – число попаданий. $k = 1$.

11. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Наудачу один за другим из урны извлекаются шары до появления первого чёрного. X – число оставшихся в урне белых шаров. $k = 2$.

12. Некто забыл последнюю цифру кодового замка. Зная, что это одна из цифр 5, 6, 7, 8, 9, он случайным образом их перебирает. X – число попыток. $k = 2$.

13. Вероятность попадания в цель из орудия при первом выстреле равна 0,3; при втором – 0,4; при третьем – 0,5; при четвёртом – 0,9. Стрельба ведётся до первого попадания, но не свыше 4 выстрелов. X – число попыток. $k = 3$.

14. В партии из 10 деталей содержится 7 деталей первого сорта. Случайным образом одну за другой без возвращения извлекаем детали до появления детали первого сорта. X – число попыток. $k = 2$.

15. По мишени ведётся стрельба до первого попадания, но не более 4 раз. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,9. X – число выстрелов. $k = 2$.

16. Вероятность попадания в цель из орудия при первом выстреле равна 0,1; при втором 0,3; при третьем 0,5; при четвёртом 0,8. Производится 4 выстрела. X – число попаданий в цель. $k = 1$.

17. Одновременно бросается 4 монеты. X – число выпавших «орлов». $k = 3$.

18. В партии из 15 деталей 10 деталей первого сорта, остальные второго. Отобраны случайным образом 4 детали. X – число деталей второго сорта среди отобранных. $k = 3$.

19. Трасса движения слаломиста состоит из четырёх участков, каждый из которых он проходит е вероятностью 0,8. В случае непрохождения одного из них спортсмен снимается с трассы. X – число пройденных участков. $k = 2$.

20. Бросаются 5 монет одновременно. X – число выпавших «орлов» . $k = 3$.

21. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания, но не более 5 раз. Вероятность попадания при каждом броске 0,4. X – число сделанных бросков. $k = 4$.

22. В группе из 6 изделий одно бракованное. Изделия выбирают одно за другим наугад до появления бракованного. X – число извлечённых доброкачественных изделий. $k = 2$.

23. В урне 5 чёрных, 3 белых и 2 красных шара. Наугад вынимают 3 шара. X – число различных цветов среди вынутых шаров. $k = 3$.

24. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надёжность. Следующий проверяется только в том случае, если предыдущий прибор оказался ненадёжным. Каждый прибор надёжен с вероятностью 0,7. X – число проверенных приборов. $k = 2$.

25. Среди 10 деталей имеется 4 бракованных. Извлекаем случайным образом без возвращения детали до тех пор, пока не вынем доброкачественную. X – число вынутых деталей. $k = 3$.

26. В приборе имеется три элемента, вероятности отказа которых за определённое время равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4. Отказы элементов независимы. X – число отказавших элементов. $k = 2$.

27. Из партии в 10 деталей, среди которых 4 бракованных, произвольным образом выбраны 3 детали. X – число бракованных деталей среди отобранных. $k = 1$.

28. По мишени одновременно стреляют 4 стрелка с вероятностью попадания 0,6 для каждого. X – число попаданий. $k = 2$.

29. В ящике 4 пары одинаковых ботинок. Вынимаем ботинки, не глядя, один за другим до тех пор, пока не составится пара. X – число вынутых ботинок. $k = 3$.

30. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. X – число заработанных очков. $k = 10$.

Задача №9

9.1 – 9.30. В случаях **а**, **б** и **в** рассматривается серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». Вероятность «успеха» равна p, «неуспеха» $q = 1 - p$ в каждом испытании. X – число «успехов» в n испытаниях. Требуется: 1) для случая **а** (малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$; 2) для случая **б** (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона; 3) для случая **в** (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Номер задачи	Случай **а**		Случай **б**		Случай **в**			
	n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
1	5	0,2	100	0,002	100	0,2	16	40
2	5	0,4	50	0,004	150	0,4	12	56
3	5	0,9	50	0,002	192	0,25	40	56
4	5	0,5	20	0,01	100	0,1	5	15
5	4	0,15	20	0,015	400	0,2	75	100
6	5	1/3	20	0,02	600	0,4	250	330
7	6	0,1	600	0,0025	768	0,25	190	220
8	4	0,4	50	0,004	100	0,9	85	92
9	4	1/3	400	0,0025	100	0,8	75	84
10	5	0,7	100	0,007	150	0,6	86	96
11	5	0,8	50	0,002	192	0,75	130	150
12	4	0,1	40	0,001	100	0,1	8	20
13	5	0,3	500	0,003	400	0,8	300	330
14	5	0,08	500	0,004	600	0,6	340	380
15	6	0,3	60	0,01	768	0,75	580	610
16	5	0,1	60	0,02	400	0,1	35	50
17	5	0,6	50	0,01	400	0,9	350	365

Номер задачи	Случай **а**		Случай **б**		Случай **в**			
	n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
18	4	0,5	200	0,0085	900	0,2	170	200
19	6	0,25	150	0,005	!350	0,4	500	550
20	6	0,75	60	0,015	900	0,1	75	100
21	4	2/3	40	0,02	900	0,8	710	735
22	6	0,7	300	0,01	1350	0,6	800	840
23	4	0,3	1000	0,001	100	0,2	15	30
24	6	0,5	100	0,01	150	0,4	45	66
25	6	0,4	100	0,003	192	0,25	45	60
26	5	0,15	100	0,02	100	0,1	10	16
27	4	0,2	30	0,01	100	0,8	70	85
28	4	0,8	50	0,008	150	0,6	90	100
29	6	0,6	600	0,004	192	0,75	135	140
30	4	0,25	500	0,008	100	0,9	85	90

Задача №10

10.1 – 10.30. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на (a, b) задана в таблице, а при $x \notin (a, b)$ $\quad f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение δ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной велнчины от математического ожидания не более заданного ε.

Номер задачи	$f(x)$	(a, b)	ε
1	$Ax + 1/3$,	(0, 1)	1/2
2	$2x + A$	(0, 1)	1/3
3	Ax^2	(0, 1)	1/2

Номер задачи	$f(x)$	(a, b)	ε
4	$A(2x + 1)$	(0, 2)	1/3
5	$A(x + 2)$	(0, 2)	1
6	$A(1 - x^2)$	(0, 1)	1/8
7	$2 - Ax$	(0, 1)	1/3
8	$A(2x^2 + 1)$	(0, 1)	1/10
9	$A(4 + 3x)$	(0, 1)	1
10	$A(x^2 + 1)$	(0, 2)	1
11	$A(4x^2 + 1)$	(0, 1)	1/7
12	$A(2 + 3x)$	(0, 1)	1/2
13	$Ax^2 + 3/4$	(0, 1)	1/2
14	$A(1 + 6x)$	(0, 1)	1/8
15	$A(1 + 3x^2/2)$	(0, 1)	1/4
16	$Ax^2 + 1/4$	(0, 2)	1/2
17	$Ax^2 + 1/3$	(0, 1)	1/3
18	$A(3x^2 + 2)$	(0, 1)	1/4
19	$3x^2/8 + A$	(0, 2)	1
20	$3x^2 + A$	(0, 1)	1/2
21	$A(6x^2+1)$	(0, 1)	1/3
22	$Ax^2 + 1/2$	(0, 1)	1/8
23	$Ax + 3/7$	(0, 1)	1/14
24	$Ax^2 + 3/5$	(0, 1)	1/5
25	$Ax^2 + 3/2$	(0, 1)	1/8
26	$2/3 + Ax$	(0, 3)	1/2

Номер задачи	$f(x)$	(a, b)	ε
27	$x/2 + A$	(0, 2)	1/3
28	$x^2 - Ax$	(0, 1)	1/3
29	$x^2 - Ax$	(0, 2)	1/5
30	$1 - Ax$	(0, 1)	1/4

Задача №11

В **11.1 – 11.10** дано, что масса вылавливаемых в пруду зеркальных карпов – случайная величина X, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленного карпа будет заключена в пределах от x_1 до x_2; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - a$ окажется меньше δ; в) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Номер задачи	a	σ	x_1	x_2	δ
1	375	25	300	425	40
2	375	30	300	450	50
3	400	30	350	425	25
4	500	75	425	550	60
5	500	50	450	525	30
6	400	25	375	450	35
7	450	40	400	500	50
8	450	50	425	475	70
9	425	30	375	475	60
10	425	35	400	450	50

В **11.11 – 11.20** предполагаем, что масса яиц – нормально распределённая случайная величина X, с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. В заготовку принимаются яйца массой от x_1 до x_2 граммов. Определить: а) вероятность того, что наудачу взятое яйцо пойдёт в заготовку; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - a$ окажется меньше 5; в) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы яйца.

Номер задачи	a	σ	x_1	x_2	δ
11	60	7	50	65	10
12	59	6	50	65	8
13	59	5	50	60	10
14	60	6	55	65	5
15	58	6	55	65	6
16	58	5	55	60	7
17	58	7	50	65	9
18	59	7	55	56	6
19	60	5	50	70	8
20	61	7	55	70	8

11.21 – 11.30 дано, что рост людей, проживающих в данной местности, есть случайная величина X, распределённая по нормальному закону со средним значением a и средним квадратическим отклонением σ. Найти: а) вероятность того, что наудачу выбранный человек имеет рост от x_1 до x_2 см; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - a$ окажется меньше δ; в) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемого роста человека.

Номер задачи	a	σ	x_1	x_2	δ
21	170	5	160	180	7
22	170	6	165	185	10
23	170	7	160	185	10

Номер задачи	a	σ	x_1	x_2	δ
24	165	7	155	175	6
25	165	6	150	170	8
26	165	5	160	175	9
27	175	7	165	175	5
28	175	6	160	180	9
29	175	5	165	185	4
30	175	8	170	180	15

Задача №12

Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей. Найти:

1) частные законы распределения случайных величин X и Y;

2) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

3) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

4) корреляционный момент C_{xy};

5) коэффициент корреляции r_{xy};

6) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y принимает своё наименьшее значение.

1.

X \ Y	–1	0	1
1	0,2	0,1	0,3
2	0	0,1	0,2
3	0	0,1	0

2.

X \ Y	1	2	3
1	0	0,1	0,1
2	0,2	0	0,2
3	0,2	0,2	0

3.

X \ Y	–2	–1	0
0	0,1	0,2	0,1
1	0,1	0	0,1
2	0,2	0,1	0,1

4.

X \ Y	0	1	2
–2	0,2	0,1	0,2
–1	0,1	0,1	0
0	0,1	0,1	0,1

5.

X \ Y	–2	2	3
0	0,1	0,1	0,2
1	0,2	0	0,1
2	0,2	0,1	0

6.

X \ Y	1	2	4
–2	0	0,2	0
–1	0,2	0,1	0
0	0,2	0,2	0,1

7.

X \ Y	–2	0	1
1	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0,2	0,1
4	0	0,1	0,1

8.

X \ Y	1	0	2
2	0,1	0,1	0,1
4	0,1	0,2	0
6	0,1	0,3	0

9.

X \ Y	2	3	4
–2	0,1	0	0
–1	0,2	0,3	0,1
0	0,1	0,1	0,1

10.

X \ Y	–3	–2	–1
–3	0	0,1	0,2
–2	0,1	0	0,1
–1	0,2	0,1	0,2

11.

X \ Y	1	2	3
–1	0,1	0,1	0
0	0,2	0,2	0,1
1	0,2	0,1	0

12.

X \ Y	2	3	4
–1	0,1	0,1	0,1
0	0,2	0,2	0,2
1	0,1	0	0

13.

X \ Y	–3	0	1
–1	0	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1

14.

X \ Y	–3	–2	0
1	0,1	0,2	0,2
2	0,1	0,1	0,1
3	0	0	0,2

15.

X \ Y	0	2	3
–2	0,1	0,1	0
1	0,2	0,2	0,1
0	0,1	0,1	0,1

16.

X \ Y	–3	0	2
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0,1	0,1

17.

X \ Y	–3	2	4
–1	0,1	0,1	0,1
0	0,1	0,2	0,
1	0,2	0,2	0

18.

X \ Y	0	3	4
–2	0,2	0,1	0
–1	0,2	0,1	0,1
0	0,1	0,1	0,1

19.

X \ Y	–1	0	2
–1	0,1	0,1	0,1
0	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1

20.

X \ Y	0	2	4
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0,1	0,1	0

21.

X \ Y	–1	2	4
0	0,1	0,2	0,2
1	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,1	0

22.

X \ Y	1	2	3
–2	0,1	0,1	0
–1	0,1	0,1	0,1
0	0,2	0,2	0,1

23.

X \ Y	0	1	2
2	0,1	0,1	0,1
3	0,2	0,1	0
4	0,3	0,1	0

24.

X \ Y	1	2	3
0	0,2	0,1	0,1
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0,1	0

25.

X \ Y	–4	0	4
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,3	0,1
3	0	0,1	0

26.

X \ Y	–4	0	1
–1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,2	0,1
4	0	0,1	0,1

27.

X \ Y	–4	–2	–1
0	0,2	0,1	0,2
1	0,1	0,1	0,1
2	0	0,1	0,1

28.

X \ Y	–4	1	4
0	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,2	0,1
4	0	0,2	0

29.

X \ Y	–4	–1	0
0	0,1	0,1	0,2
1	0,1	0,1	0,1
3	0	0,1	0,2

30.

X \ Y	–4	–2	0
0	0,1	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,1
4	0	0,1	0,1

Задача №13

Вне области U плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y) равна 0. В U плотность равна $f(x, y)$. Найти:

1) коэффициент A;

2) вероятность $P = P((X, Y) \in G)$;

3) одномерные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$;

4) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

5) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

6) корреляционный момент C_{xy};

7) коэффициент корреляции r_{xy}.

1. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = A(x + y)$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

2. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = A(2x + y)$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

3. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = A(x + 2y)$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

4. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = Axy$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

5. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = Ax^2y$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

6. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = Axy^2$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

7. $U = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$, $f(x, y) = Axy$, $G = \{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$.

8. $U = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, $f(x, y) = A(2x + y)$, $G = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

9. $U = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, $f(x, y) = A(x + 2y)$, $G = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

10. $U = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$, $f(x, y) = A(x + y)$, $G = \{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$.

11. $U = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$, $f(x, y) = A(2x + y)$, $G = \{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$.

12. $U = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$, $f(x, y) = A(x + 2y)$, $G = \{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$.

13. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = A(x^2 + y)$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

14. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = A(x + y^2)$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

15. $U = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, $f(x, y) = A(x^2 + y)$, $G = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

16. $U = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, $f(x, y) = A(x + y^2)$, $G = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

17. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = A(2x^2 + y)$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

18. $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = A(x^2 + 2y)$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

19. $U=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, $f(x,y)=A(2x+y^2)$, $G=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

20. $U=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, $f(x,y)=A(x+2y^2)$, $G=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

21. $U=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, $f(x,y)=A(x^2+y^2)$, $G=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

22. $U=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$, $f(x,y)=A(x^2+y^2)$, $G=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

23. $U=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, $f(x,y)=A(x^2+y^2)$, $G=\{0\le x\le \frac{1}{2}, 0\le y\le \frac{1}{2}\}$.

24. $U=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, $f(x,y)=A(2x^2+y^2)$, $G=\{0\le x\le \frac{1}{2}, 0\le y\le \frac{1}{2}\}$.

25. $U=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, $f(x,y)=A(x^2+2y^2)$, $G=\{0\le x\le \frac{1}{2}, 0\le y\le \frac{1}{2}\}$.

26. $U=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, $f(x,y)=Ax^2y^2$, $G=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

27. $U=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$, $f(x,y)=Ax^2y^2$, $G=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

28. $U=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, $f(x,y)=Ax^2y^2$, $G=\{0\le x\le \frac{1}{2}, 0\le y\le \frac{1}{2}\}$.

29. $U=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, $f(x,y)=Ax^2y$, $G=\{0\le x\le \frac{1}{2}, 0\le y\le \frac{1}{2}\}$.

30. $U=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, $f(x,y)=Axy^2$, $G=\{0\le x\le \frac{1}{2}, 0\le y\le \frac{1}{2}\}$.

Задача №14

Даны 16 выборочных значений x_1, x_2, …, x_{16} признака ξ, имеющего нормальный закон распределения с неизвестными параметрами a, b. Требуется:

1) найти оценки $\tilde{a}, \tilde{b}$ параметров a, b и доверительные интервалы для них с надёжностью 0,95;

2) подставляя оценки $\tilde{a}, \tilde{b}$ вместо истинных параметров a, b, сделать следующее:

а) написать выражение $\tilde{f}(x)$ для оценки плотности и $\tilde{F}(x)$ для оценки функции распределения и найти отсюда оценку для $P(\xi > 1+0,05v)$, где v –

номер варианта;

б) построить график $y = \tilde{f}(x)$;

3) найти эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ и построить на одном чертеже графики $y = F_n(x)$ и $y = \tilde{F}(x)$ (график $y = \tilde{F}(x)$ построить по точкам $(x_i, \tilde{F}(x_i))$ при $i = 1, \ldots, 16$). Найти $\max\limits_x \left| F_n(x) - \tilde{F}(x) \right|$.

Номер варианта	**Случайные числа**
1	0,464; 0,060; 0,137; –2,256; 2,455; –0,531; –0,323; –0,194; –0,068; 0,543; 0,296; –1,558; –0,288; 0,187; 1,298; –1,190
2	1,496; 1,022; –0,354; –0,472; –0,634; 1,279; 0,697; 3,521; 0,926; 0,571; 1,375; –1,851; 0,785; 0,194; –0,963; 1,192
3	1,394; 0,906; –0,555; –0,513; 0,046; –0,525; 0,321; 0,595; 2,945; 0,881; 1,974; –0,934; –0,258; 1,579; 0,412; 0,161
4	1,179; –1,501; –1,055; –0,488; 0,007; –0,162; 0,769; –0,136; 0,971; 1,033; 0,712; 0,203; 1,090; 0,448; –0,631; 0,748
5	–0,690; 1,372; 0,756; 0,225; –1,618; 0,378; –0,345; 0,761; –0,511; 0,181; –2,051; –0,736; –0,457; 0,960; –0,218; –1,530
6	–0,482; –1,376; 1,678; –0,150; –0,057; 1,356; –1,229; –0,561; –0,486; –0,256; 0,856; –0,212; –0,491; 0,219; –1,983; 0,779
7	–1,010; –0,005; 0,598; –0,899; –0,918; 0,012; 1,598; –0,725; 0,065; 1,147; 0,415; –0,121; –0,169; 1,096; 0,313; 0,181
8	1,393; –1,787; –1,163; –0,261; –0,911; 1,237; 1,231; 1,046; –0,199; –0,508; –0,246; –1,630; 1,239; –0,146; –2,574; –0,392
9	–0,105; –1,339; –0,357; 1,827; –1,384; –0,959; 0,360; 0,424; –0,992; 0,969; –0,116; –1,141; –1,698; –1,041; –2,832; 0,362
10	1,041; 0,279; 0,535; –2,056; 0,731; 0,717; 1,377; –0,873; 0,983; –1,096; –1,330; –1,396; 1,620; 1,047; –1,040; 0,089
11	–1,805; –1,186; –2,008; 1,180; –1,633; 1,114; 0,542; 0,882; 0,250; 1,265; –0,166; –0,202; 0,032; 0,151; 0,079; –0,376

12	0,658; –0,439; –1,141; 0,358; 1,151; –1,939; –1,210; 0,891; –0,927; –0,227; 0,425; 0,602; 0,290; 0,873; –0,902; –0,437
13	–1,399; 0,199; –0,230; 0,208; 0,385; –1,083; –0,649; –0,219; –0,577; –0,291; 0,237; 1,221; –0,289; 1,119; 0,513; 0,004
14	0,159; 2,273; 0,272; 0,606; –0,313; 0,606; 0,084; –0,747; –2,828; 0,247; –0,439; 1,291; –0,792; 0,063; –1,275; –1,793
15	0,041; –1,132; –0,307; –2,098; 0,121; 0,921; 0,790; 0,145; –0,584; 0,446; 0,541; –1,661; 0,484; 1,045; –0,986; –1,363
16	0,768; 0,375; 0,079; –1,658; –1,473; –0,851; 0,034; 0,234; –2,127; –0,656; 0,665; 0,340; 0,084; –0,086; –0,880; –0,158
17	–0,513; 0,292; –0,344; –0,521; 0,210; 1,266; –0,736; –1,206; 1,041; –0,899; 0,008; 0,110; 0,427; –0,528; –0,831; –0,813
18	1,026; –1,334; 2,990; 1,278; –0,574; –0,568; –0,491; –0,109; –1,114; -0,515; 1,297; –0,566; –1,433; 2,923; –1,345; 0,500
19	–0,287; 0,161; –0,144; –0,886; –0,254; –0,921; 0,574; –0,509; –0,451; 1,410; –1,181; –0,518; –1,190; 0,192; –0,318; –0,432
20	–1,346; 1,250; 0,193; –0,199; –1,202; –0,288; 0,394; 1,810; –1,045; 1,378; 0,843; 0,584; 0,942; 1,216; 1,045; 0,733
21	0,630; 0,375; –0,537; –1,941; 0,782; 0,247; 0,060; –0,491; 0,499; 0,665; –0,431; –0,135; 1,705; –0,145; 1,164; –0,498
22	–1,420; –0,151; 0,489; –0,243; –1,711; –0,430; –1,186; –0,762; 0,754; 0,298; –0,732; 1,049; –0,066; 1,810; 1,006; 2,885
23	–0,309; 0,424; 0,531; –0,444; 0,416; 0,593; –1,541; 0,993; 1,456; –0,106; 2,040; 0,116; –0,124; 0,484; 0,196; –1,272
24	0,593; 0,862; 0,658; –0,885; –1,127; –0,142; –1,407; –0,504; –1,579; 0,532; –1,616; 1,381; 1,458; 0,022; 1,262; –0,281
25	0,235; –0,853; –0,628; 0,402; –0,023; 0,777; –0,463; 0,833; –0,899; 0,410; –0,394; –0,349; –0,538; –1,094; 1,707; 0,580
26	0,241; 0,022; –0,957; 0,525; –1,885; –0,255; 0,371; –0,702; –2,830; 0,953; –0,238; –0,869; –0,627; –1,108; 0,561; –2,357
27	–0,853; –0,501; –1,865; –0,273; –0,423; 0,857; –0,432; –0,465; –0,973; –1,691; –1,016; 0,417; –1,726; 0,524; 1,956; –0,281

28	0,439; 0,471; –0,035; –1,029; –0,260; –2,015; 0,120; –0,594; –0,558; –0,579; 0,056; 0,551; –0,573; 0,359; 0,932; 0,326
29	–0,310; 0,610; 0,479; 2,709; –0,623; –0,699; –1,047; –1,347; –0,120; 0,191; 0,418; 0,074; –0,094; 1,501; 1,114; 1,068
30	–0,220; 0,738; –0,057; –0,300; 0,481; –0,586; 0,996; –1,023; 0,071; –3,001; 0,524; 0,479; 0,031; 0,402; 0,772; 0,226

Приложение

Таблица 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	1951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	1847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	5781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180

Окончание табл. 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,31	0,1217	0,62	0,2324	0,93	0,3238
0,01	0,0040	0,32	0,1255	0,63	0,2357	0,94	0,3264
0,02	0,0080	0,33	0,1293	0,64	0,2389	0,95	0,3289
0,03	0,0120	0,34	0,1331	0,65	0,2422	0,96	0,3315
0,04	0,0160	0,35	0,1368	0,66	0,2454	0,97	0,3340
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,67	0,2486	0,98	0,3365
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,68	0,2517	0,99	0,3389
0,07	0,0279	0,38	0,1480	0,69	0,2549	1,00	0,3413
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,70	0,2580	1,01	0,3438
0,09	0,0359	0,40	0,1554	0,71	0,2611	0,02	0,3461
0,10	0,0398	0,41	0,1591	0,72	0,2642	1,03	0,3485
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,73	0,2673	1,04	0,3508
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,74	0,2703	1,05	0,3531
0,13	0,0517	0,44	0,1700	0,75	0,2734	1,06	0,3554
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,76	0,2764	1,07	0,3577
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,77	0,2794	1,08	0,3599
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,78	0,2823	1,09	0,362 1
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,79	0,2852	1,10	0,3643
0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,80	0,2881	1,11	0,3665
0,19	0,0753	0,50	0,1915	0,81	0,2910	1,12	0,3686
0,20	0,0793	0,51	0,1950	0,82	0,2939	1,13	0,3708
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,83	0,2967	1,14	0,3729
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,84	0,2995	1,15	0,3749
0,23	0,0910	0,54	0,2054	0,85	0,3023	1,16	0,3770
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,86	0,305 1	1,17	0,3790
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,87	0,3078	1,18	0,3810
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,88	0,3106	1,19	0,3830
0,27	0,1064	0,58	0,2190	0,89	0,3133	1,20	0,3849
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,90	0,3159	1,21	0,3869
0,29	0,1141	0,60	0,2257	0,91	0,3186	1,22	0,3888
0,30	0,1179	0,61	0,2291	0,92	0,3212	1,23	0,3907

Окончание табл. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,24	0,3925	1,59	0,4441	1,94	0,4738	2,58	0,4951
1,25	0,3944	1,60	0,4452	1,95	0,4744	2,60	0,4953
1,26	0,3962	1,61	0,4463	1,96	0,4750	2,62	0,4956
1,27	0,3980	1,62	0,4474	1,97	0,4756	2,64	0,4959
1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,98	0,4761	2,66	0,4961
1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,99	0,4767	2,68	0,4963
1,30	0,4032	1,65	0,4505	2,00	0,4772	2,70	0,4965
1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,02	0,4783	2,72	0,4967
1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,04	0,4793	2,74	0,4969
1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,06	0,4803	2,76	0,4971
1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,08	0,4812	2,78	0,4973
1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,72	0,4967
1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,12	0,4830	2,74	0,4969
1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,14	0,4838	2,76	0,4971
1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,16	0,4846	2,78	0,4973
1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,18	0,4854	2,80	0,4974
1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,20	0,4861	2,82	0,4976
1,41	0,4207	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,84	0,4977
1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,24	0,4875	2,86	0,4979
1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,26	0,4881	2,88	0,4980
1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,28	0,4887	2,90	0,4981
1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,30	0,4893	2,92	0,4982
1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,32	0,4898	2,94	0,4984
1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,34	0,4904	2,96	0,4985
1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,36	0,4909	2,98	0,4986
1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,38	0,4913	3,00	0,49865
1,50	0,4332	1,85	0,4678	2,40	0,4918	3,20	0,4993 1
1,51	0,4345	1,86	0,4686	2,42	0,4922	3,40	0,49966
1,52	0,4357	1,87	0,4693	2,44	0,4927	3,60	0,499841
1,53	0,4370	1,88	0,4699	2,46	0,4931	3,80	0,499928
1,54	0,4382	1,89	0,4706	2,48	0,4934	4,00	0,499968
1,55	0,4394	1,90	0,4713	2,50	0,4938	4,50	0,499997
1,56	0,4406	1,91	0,4719	2,52	0,4941	5,00	0,499997
1,57	0,4418	1,92	0,4726	2,54	0,4945		
1,58	0,4429	1,93	0,4732	2,56	0,4948		

Таблица 3

Значения функции $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,329,	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	
3	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	
6	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842
3	0,0613	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404
4	0,0153	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Окончание табл. 3

k \ λ	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,1729
14	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица 4

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

	γ				γ		
n	0,95	0,99	0,999	n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,769	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 5

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

	γ				γ		
n	0,95	0,99	0,999	n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблица 6

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы S	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,46
15	30,6	27,6	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,69	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0