

Федеральное агентство по образованию

**Красноярская государственная
архитектурно-строительная академия**

А.Е. Бурученко

ФИЗИКА

Часть 1

Красноярск, 2003

ВВЕДЕНИЕ

Слово "физика" греческого происхождения и первоначально означало науку о природе или естествознание. Теперь физика является лишь одной из наук о природе. Она изучает простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства движущейся материи.

По современным представлениям материя существует в двух основных формах: в форме вещества и в форме поля. Под веществом мы понимаем элементарные частицы, атомы, молекулы и все тела, состоящие из атомов и молекул. В физике известны такие поля, как гравитационное, электромагнитное (свет, радиоволны) и ядерное. Эти две формы материи не изолированы друг от друга, они могут превращаться друг в друга. Например, гамма-квант при определенных условиях превращается в пару частиц: электрон и позитрон, которые в свою очередь могут превратиться в квант электромагнитного излучения.

Материя может существовать только в движении. Движение представляет собой вечную форму бытия материи.

Соответственно многообразию явлений природы существует и множество различных видов движения материи. Но среди этого множества можно выделить несколько основных форм, каждая из которых охватывает более или менее широкий круг явлений, родственных в определенном отношении. Это - механическая форма движения, химическая, биологическая и социальная. Физика изучает наиболее простые формы движения, которые являются и наиболее общими (механические, молекулярные и т.д.), электромагнитные, внутриатомные и ядерные явления. Другие, более высокие, формы движения изучаются другими науками, такими, как химия, биология и т.д.

Изучение физических явлений начинается с наблюдения, либо с эксперимента. Наблюдение - это изучение явления в природных условиях, в естественной обстановке. Эксперимент - изучение явления в условиях, специально созданных человеком. На основе накопленного экспериментального материала строится гипотеза - научное предположение о механизме явления и связи его с другими явлениями. Но гипотеза требует проверки и доказательств. Некоторые гипотезы противоречат опыту, оказываются ошибочными и отбрасываются при дальнейшем развитии науки (гипотезы эфира, флогистона и др.).

Гипотезы, которые выдерживают проверку на опыте и правильно предсказывают ряд явлений, которые ранее не были известны, входят в науку в качестве теорий. Правильная физическая теория дает качественное и количественное объяснение целой области явлений природы с единой точки зрения.

Однако процесс познания не ограничивается таким кругом - от опыта к теории и от теории к опыту. Скоро появляются такие факты, объяснение которых не укладывается в рамки старых теорий, и требуют выдвижения новых гипотез. Примером этого является развитие наших знаний о строении вещества. Молекулярно-кинетическая теория вещества, созданная в XIX в., исходила из того, что все тела состоят из мельчайших частиц - атомов, которые находятся в непрерывном движении. Атом - значит неделимый, что в дальнейшем оказалось не так.

Новые теории не всегда отрицают старые, в большинстве случаев они включают старые теории как часть, т.е. являются более широкими и всеобъемлющими.

Развитие физики тесно связано с развитием человеческого общества, потребностями практики. Известно, что технические потребности привели в свое время к развитию механики. Задача создания автономных тепловых машин вызвала бурное развитие термодинамики. В то же время физика оказывает огромное влияние на технику. Крупные физические открытия приводят к техническим переворотам. Например, открытие Фарадеем явления электромагнитной индукции создало возможность широкого практического использования электромагнитных явлений.

Связь между физикой и техникой двухсторонняя. Развитие техники даст физике более точные приборы и более мощные методы исследования. Так, развитие атомной физики позволило использовать в настоящее время атомную энергию в мирных целях. Широкое использование вычислительных машин оказалось возможным только благодаря достижениям физики твердого тела.

Основоположник русской физики и химии М.В. Ломоносов сочетал свою научную работу с требованиями практики. Его многочисленные и разнообразные исследования по природе твердых и жидких тел, оптике, атмосферному электричеству были связаны с теми или иными практическими задачами. А.С. Попов использовал открытие Максвелла - теорию электромагнитных процессов - для осуществления радиотелеграфии. Выдающийся ученый Н.В. Жуковский создал основы воздухоплавания. К.Э. Циолковский и И.В. Мещерский много сделали в области ракетной техники. Среди русских физиков были и теоретики, к ним относится Н.А. Умов, Л.А.Келдыш и т.д.

Советская наука в исключительно короткие сроки добилась огромных успехов в таких решающих направлениях развития естествознания, как освоение космоса, физика элементарных частиц, физика плазмы и др.

Во всем мире известны имена наших физиков - теоретиков Л.Д. Ландау, И.Е. Тамма и т. д. И. В. Курчатов известен своими работами в области атомной физики. С. В. Королев осуществил первый космический полет. Известны и другие физики.

Физические черты и характеристики свойственны любым явлениям природы, в том числе и тем, которые используются в различных отраслях техники, причем в этом случае приходится иметь дело со сложным комплексом явлений. Таким образом, физика служит естественной основой технических наук. Например, механика является основой таких дисциплин, как теоретическая механика, теория упругости и сопротивление материалов, используемых при проектировании станков, машин, автомобилей.

Термодинамика развилась в разделы тепло - и хладотехники. Без знания вопросов электричества и магнетизма невозможно изучение таких наук, как электротехника, радиотехника, электроника, которые играют ведущую роль в развитии автоматики, телемеханики и телеуправления.

Возрастающая роль физики в современной технике получила свое выражение в появлении ряда специальных дисциплин таких, как физические основы

электротехники, физические основы резания металла и др. Все глубже в технику внедряются физические методы обработки и испытания материалов, физические методы контроля производственных процессов и качества изделий и т. п.

От современных инженеров требуется не только умело применять существующее оборудование, но и повсеместно развивать и совершенствовать технику. Такая творческая работа возможна только при хорошем знании физики. Вот почему хорошее усвоение физики необходимо инженеру.

Большую роль играет физика и в формировании научного мировоззрения специалиста.

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно - технических специальностей высших учебных заведений и предназначено для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения с ограниченным числом часов по физике.

Пособие состоит из двух частей. В первой части дано изложение физических основ классической механики и рассмотрены элементы специальной теории относительности. Вторая часть посвящена основам молекулярной физики и термодинамики. Сведения о размерностях физических величин и системных единиц вынесены в приложения.

I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Механика - часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение - это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Развитие механики как науки начинается с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый Архимед (287 - 212 гг. до н.э.) сформулировал закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564 - 1642 гг.) и окончательно сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1643 - 1727 гг.).

Механика Галилея - Ньютона называется **классической** механикой. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Законы движения этих тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света изучаются **релятивистской механикой**, основанной на **специальной теории относительности**, сформулированной А. Эйнштейном (1879 - 1955 гг.). Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы - они заменяются законами **квантовой механики**.

В первой главе нашего курса мы будем иметь дело с механикой Галилея - Ньютона, т.е. будем рассматривать движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света. В классической механике общепринята концепция пространства и времени, разработанная И. Ньютоном и господствовавшая в естествознании на протяжении XVII - XIX вв. Механика

Галилея - Ньютона рассматривает пространство и время как объективные формы существования материи, но в отрыве друг от друга и от движения материальных тел, что соответствует уровню знаний того времени.

Так как механическое описание наглядно и привычно и с его помощью можно объяснить многие физические явления, в XIX в. некоторые физики стали сводить все явления к механическим. Эта точка зрения соответствовала философскому механическому материализму. Дальнейшее развитие физики показало, однако, что многие физические явления не могут быть сведены к простейшему виду движения - механическому. Механистический материализм должен был уступить место материализму диалектическому, рассматривающему более общие виды движения материи и учитывающему все разнообразие реального мира.

Механика делится на три раздела: кинематику, динамику, статику.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия. Поэтому законы статики отдельно от законов динамики не рассматриваются.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Модели в механике. Система отсчета.

Траектория, длина пути, вектор перемещения

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные **физические модели**. Простейшей моделью является **материальная точка** - тело, обладающее массой, размером которого в данной задаче можно пренебречь. Понятие материальной точки абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач. Например, изучая движение планет по орбитам вокруг Солнца, можно принять их за материальные точки.

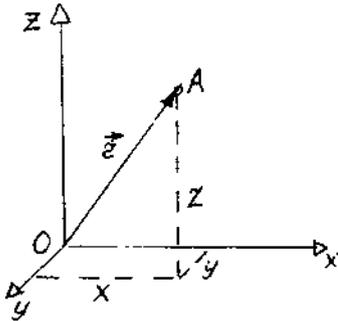
Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на целые, взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению **системы материальных точек**. В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению движения системы материальных точек.

Под воздействием тел друг на друга тела могут деформироваться, т.е. изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель - абсолютно твердое тело. **Абсолютно твердым телом** называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений. **Поступательное движение** - это

движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. **Вращательное движение** - это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения**.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.



Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому, произвольно выбранному телу, называемому **телом отсчета**. С ним связывается **система отсчета** - совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета. В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки A в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами x , y и z или радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из начала системы координат в данную точку (рис. 1)

Рис. 1

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются.

В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

эквивалентными векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1), (1.2) называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки**.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется **числом степеней свободы**. Если материальная точка свободно движется в пространстве, то, как уже было сказано, она обладает тремя степенями свободы (координаты x , y , z); если она движется по некоторой поверхности, то - двумя степенями свободы; если вдоль некоторой линии, то - одной.

Исключая t в уравнениях (1.1) и (1.2), получим уравнение траектории движения материальной точки. **Траектория** движения материальной точки - линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

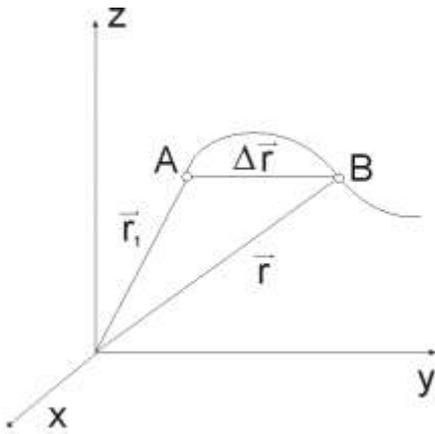


Рис. 2

Вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется **перемещением**.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории, и модуль перемещения $|\Delta \vec{r}|$ равен пройденному пути Δs .

1.2. Скорость

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина - скорость, которой определяется как **быстрота** движения, так и его **направление** в данный момент времени. Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени t ей соответствует радиус-вектор \vec{r}_0 (рис.3). В течение малого промежутка времени Δt точка пройдет путь ΔS получит элементарное (бесконечно малое) перемещение $\Delta \vec{r}$.

Вектором средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ называется отношение приращения $\Delta \vec{r}$ радиуса-вектора точки к промежутку времени Δt :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.3).$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta \vec{r}$. При неограниченном уменьшении Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется **мгновенной скоростью** \vec{V} :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

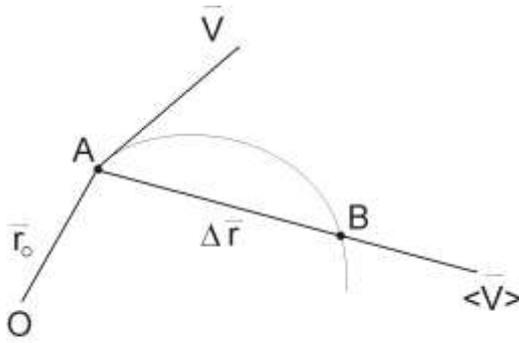


Рис. 3

Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости \vec{V} направлен по касательной к траектории в сторону движения (рис.3). По мере уменьшения Δt путь Δs все больше будет приближаться к $|\Delta \vec{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$|\vec{V}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$\vartheta = \frac{ds}{dt}. \quad (1.4)$$

При неравномерном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной $\langle \vartheta \rangle$ - **средней** скоростью неравномерного движения:

$$\langle \vartheta \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Из рис.3 вытекает, что $\langle \vartheta \rangle > \langle |\vec{v}| \rangle$, так как $s > |\Delta \vec{r}|$ и только в случае прямолинейного движения $\Delta s = |\Delta \vec{r}|$.

Если выражение $ds = \vartheta dt$ (1.4) проинтегрировать по времени в пределах от t до $t + \Delta t$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время Δt :

$$s = \int_t^{t+\Delta t} \vartheta dt \quad (1.5)$$

В случае **равномерного движения** числовое значение мгновенной скорости постоянно; тогда выражение (1.5) примет вид

$$s = \vartheta \int_t^{t+\Delta t} dt = \vartheta \Delta t$$

1.3. Ускорение и его составляющие

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является **ускорение**. Рас-

смотрим **плоское движение**, т.е. такое, при котором все траектории точки лежат в одной плоскости. Пусть вектор \vec{v} задает скорость точки А в момент времени t . За время Δt движущаяся точка перешла в положение В и приобрела скорость, отличную от \vec{v} как по модулю, так и направлению и равную $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Перенесем вектор \vec{v}_1 в точку А и найдем $\Delta\vec{v}$ (рис.4).

Средним ускорением неравномерного движения в интервале от t до $t+\Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени Δt :

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенным ускорением \vec{a} (ускорением) материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Таким образом, ускорение \vec{a} есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

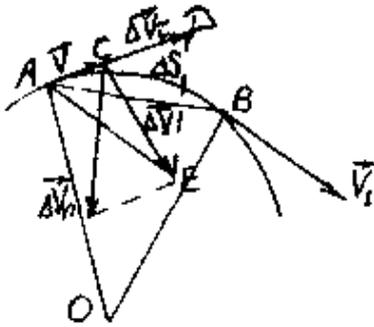


Рис. 4

Разложим вектор $\Delta\vec{v}$ на две составляющие. Для этого из точки А (рис.4) по направлению скорости \vec{v} отложим вектор $A\vec{D}$, по модулю равный \vec{v}_1 . Очевидно, что вектор $C\vec{D}$, равный $\Delta\vec{v}_\tau$, определяет изменение скорости по модулю за время Δt :

$$\Delta\vartheta_\tau = \vartheta_1 - \vartheta.$$

Вторая же составляющая вектора $\Delta\vec{v} - \Delta\vec{v}_\tau$ характеризует изменение скорости за время Δt **по направлению**.

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости и определяет тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка В достаточно близка к точке А, поэтому ΔS можно считать дугой окружности некоторого радиуса r , мало отличающегося от хорды АВ. Тогда из подобия треугольников АОВ и ЕАД следует $\frac{\Delta\vartheta_n}{AB} = \frac{\vartheta_1}{r}$, но т.к. $AB = \vartheta \Delta t$,

то $\frac{\Delta\vartheta_n}{\Delta t} = \frac{\vartheta\vartheta_1}{r}$. В пределе при $t \rightarrow 0$ получим $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_2$.

Поскольку $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}$, угол ЕАД стремится к нулю, а т.к. треугольник ЕАД равнобедренный, то угол АДЕ между \vec{v} и $\Delta\vec{v}_n$ стремится к прямому. Следовательно, при $t \rightarrow 0$ векторы \vec{v} и $\Delta\vec{v}_n$ оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор

$\Delta \vec{v}_n$, перпендикулярный к вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Вторая составляющая ускорения, равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta_n}{\Delta t} = \frac{\vartheta^2}{r},$$

называется **нормальной составляющей ускорения** и направлена по нормали к траектории, к центру ее кривизны (поэтому ее называют также **центростремительным ускорением**).

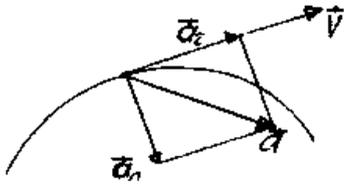


Рис.5

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих (рис.5):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Тангенциальная составляющая ускорения характеризует **быстроту изменения** скорости по модулю (направлена по касательной к траектории), а **нормальная** составляющая ускорения - быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории).

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

$a_\tau = 0, a_n = 0$ - прямолинейное равномерное движение;

$a_\tau = a = \text{const}, a_n = 0$ - прямолинейное равнопеременное движение. При таком

виде движения $a_\tau = a = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{t_2 - t_1}$. Если начальный момент времени $t = 0$, а

начальная скорость $\vartheta_1 = \vartheta_0$, то, обозначив $t_2 = t$ и $\vartheta_2 = \vartheta$, получим $a = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{t}$,

откуда $\vartheta = \vartheta_0 + at$.

Проинтегрировав формулу $ds = \vartheta dt$ в пределах от нуля до произвольного момента времени t , получим длину пути, пройденного точкой, в случае равнопеременного движения:

$$s = \int_0^t \vartheta dt = \int_0^t (\vartheta_0 + at) dt = \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$a_\tau = f(t), a_n = 0$ - прямолинейное движение с переменным ускорением;

$a_\tau = 0, a_n = \text{const}$. При $a_\tau = 0$ скорость по модулю не изменяется, а изменя-

ется по направлению. Из формулы $a_n = \frac{\vartheta^2}{r}$ следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, движение по окружности является равномерным;

$a_\tau = 0, a_n \neq 0$ - равномерное криволинейное движение;

$a_\tau = \text{const}, a_n \neq 0$ - криволинейное равнопеременное движение;

$a_\tau = f(t), a_n \neq 0$ - криволинейное движение с переменным ускорением.

1.4 Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R (рис.6). Ее положение через промежуток времени Δt зададим углом $\Delta\varphi$. Элементарные (бесконечно малые) углы поворота рассматриваются как векторы. Модуль вектора $d\varphi$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется **правилу правого винта** (рис.6).

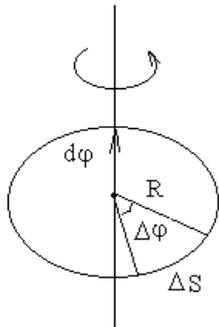


Рис. 6

Векторы, направление которых связывается с направлением вращения, называются **псевдовекторами** или **аксиальными векторами**. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т.е. так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$ (рис.7).

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}.$$

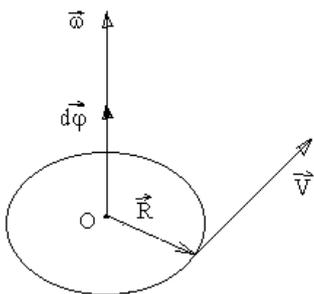


Рис. 7

Размерность угловой скорости $\dim \omega = T^{-1}$, а ее единица - радиан в секунду (рад/с). Линейная скорость точки:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \omega,$$

т.е. $v = \omega R$.

Если $\omega = \text{const}$, то вращение равномерное и его можно характеризовать **периодом вращения** T – временем, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π . Так как промежуток времени $\Delta t = T$ соответствует $\Delta \varphi = 2\pi$, то $\omega = \frac{2\pi}{T}$, откуда $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности в единицу времени, называется **частотой вращения**

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \text{ откуда } \omega = 2\pi n.$$

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рис. 8), при замедленном - противоположен ему (рис. 9).

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_{\tau} = \frac{d\vartheta}{dt}, \vartheta = \omega R \text{ и } a_{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{\vartheta^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

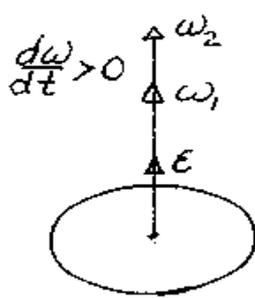


Рис.8

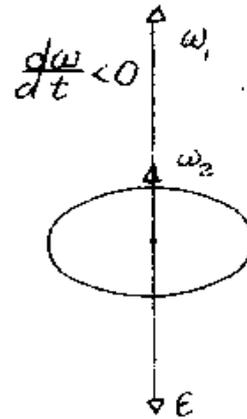


Рис.9

Таким образом, связь между линейными (длина пути s , пройденного точкой по дуге окружности радиуса R , линейная скорость ϑ , тангенциальное ускорение a , нормальное ускорение a_n) и угловыми величинами (угол поворота φ , угловая скорость ω , угловое ускорение ε) выражается следующими формулами:

$$s = R\varphi, \vartheta = R\omega, a_{\tau} = R\varepsilon, a_n = \omega^2 R.$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности ($\varepsilon = \text{const}$):

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \text{ где } \omega_0 - \text{ начальная угловая скорость.}$$

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Первый закон Ньютона. Масса. Сила

Динамика является основным разделом механики, в ее основе лежат три закона Ньютона, сформулированные им в 1687 г. Законы Ньютона играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов всего человеческого опыта.

Первый закон Ньютона: всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние.

Стремление сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**. Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции**.

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению, к которым он выполняется, называются **инерциальными системами отсчета**. Инерциальной системой отсчета является такая система, которая либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно относительно какой-то другой инерциальной системы. Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной. Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т.е., иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы). Масса тела - физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные и гравитационные свойства.

В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения).

Чтобы описать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т.е. приобретают ускорения, либо деформируются, т.е. изменяют свою форму и размеры. В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, **сила** - это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате, которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

2.2. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона - основной закон динамики поступательного движения - отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что ускорение, приобретаемое телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей приложенных сил:

$$a \sim F \quad (m = \text{const}). \quad (2.1)$$

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорение оказывается различным, а именно:

$$a \sim \frac{1}{m} \quad (F = \text{const}). \quad (2.2)$$

Используя выражения (2.1) и (2.2) и учитывая, что сила и ускорение - величины векторные, можем записать

$$\vec{a} = \frac{k \vec{F}}{m} \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) выражает **второй закон Ньютона**: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

В СИ коэффициент пропорциональности $k = 1$. Тогда

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

или

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.4)$$

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (2.4) ее можно ввести под знак производной:

$$\vec{F} = d \frac{m \vec{v}}{dt}. \quad (2.5)$$

Векторная величина

$$\vec{p} = m \vec{v}, \quad (2.6)$$

численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется **импульсом (количеством движения)** этой материальной точки.

Подставляя (2.6) в (2.5), получим

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.7)$$

Это выражение – **более общая формулировка второго закона Ньютона**: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (2.7) называется **уравнением движения материальной точки**.

Единица силы в СИ – **ньютон** (Н): 1 Н - сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы:

$$1 \text{ Н} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей сил (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение (см. (2.3)) также равно нулю. Однако первый закон Ньютона рассматривается как самостоятельный закон (а не как следствие второго закона), т. к. именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется уравнение (2.7).

В механике большое значение имеет **принцип независимости действия сил**: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

Например, на рис.10 действующая сила $\vec{F} = m \vec{a}$ разложена на два компонента: тангенциальную силу \vec{F}_τ (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу \vec{F}_n (направлена по нормали к центру кривизны). Используя выражения $a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt}$ и $a_n = \frac{\vartheta^2}{R}$, а также $\vartheta = R\omega$, можно записать:

$$F_\tau = ma_\tau = \frac{m d\vartheta}{dt};$$

$$F_n = ma_n = \frac{m\vartheta^2}{R} = m\omega^2 R.$$

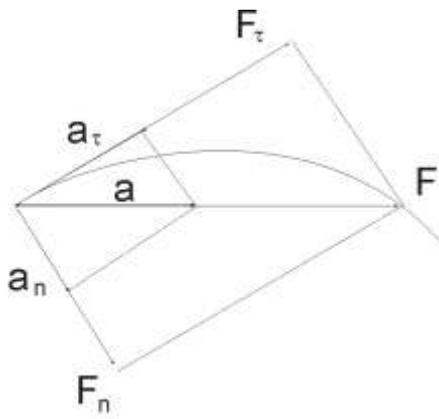


Рис. 10

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под F во втором законе Ньютона понимают результирующую силу.

2.3. Третий закон Ньютона

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется **третьим законом Ньютона**: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.8)$$

где \vec{F}_{12} - сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; \vec{F}_{21} - сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы.

При использовании законов динамики иногда допускают следующую ошибку: т. к. действующая сила всегда вызывает равную по модулю и противоположную по направлению силу противодействия, то, следовательно, их равнодействующая должна быть равна нулю и тела вообще не могут приобрести ускорения. Однако надо помнить, что во втором законе Ньютона речь идет об ускорении, приобретаемом телом под действием приложенных к нему сил. Равенство нулю ускорения означает равенство нулю равнодействующей сил, приложенных к одному и тому же телу. Третий же закон Ньютона говорит о равенстве сил, приложенных к различным телам. На каждое из двух взаимодействующих тел действует только одна сила, которая и сообщает данному телу ускорение.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики отдельной материальной точки к динамике системы материальных точек.

Это следует из того, что для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

2.4. Силы трения

Обсуждая до сих пор силы, мы не интересовались их происхождением. Однако в механике мы будем рассматривать различные силы: трения, упругости, тяготения.

Из опыта известно, что всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него других сил с течением времени замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Это можно объяснить существованием **силы трения**, которая препятствует скольжению соприкасающихся тел друг относительно друга. Силы трения зависят от относительных скоростей тел. Силы трения могут быть разной природы, но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

Различают внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение. **Внешним трением** называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении.

Обсудим некоторые закономерности внешнего трения. Это трение обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей; в случае же очень гладких поверхностей трение обусловлено силами межмолекулярного притяжения.

Рассмотрим лежащее на поверхности тело (рис. 11), к которому приложена горизонтальная сила F .

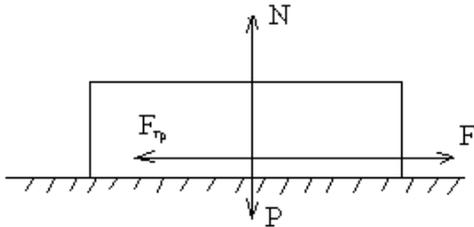


Рис. 11

Тело придет в движение лишь тогда, когда приложенная сила F будет больше силы трения $F_{\text{тр}}$. Опытным путем установлен следующий закон:

сила трения скольжения F пропорциональна силе N нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{\text{тр}} = f N,$$

где f - коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

2.5. Закон сохранения импульса.

Центр масс

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется **механической системой**. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются **внутренними**. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются **внешними**. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой** или **изолированной**. Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т.е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, масса и скорость которых соответственно равны m_1, m_2, \dots, m_n и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Пусть $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ - равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ - равнодействующие внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из n тел механической системы:

$$\frac{d m_1 \vec{v}_1}{dt} = \vec{F}'_1 + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d m_2 \vec{v}_2}{dt} = \vec{F}'_2 + \vec{F}_2,$$

.....

$$\frac{d \sum_{n=1}^n m_n \vec{v}_n}{dt} = \vec{F}'_n + \vec{F}_n.$$

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$\frac{d \sum_{n=1}^n m_n \vec{v}_n}{dt} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Но так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\frac{d \sum_{n=1}^n m_n \vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

или

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (2.9)$$

где $\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ - импульс системы.

Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{dt} = 0,$$

т.е.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Это выражение и является **законом сохранения импульса**: импульс замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона.

Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный характер, т.е. закон сохранения импульса - фундаментальный закон природы.

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства - его однородности. **Однородность пространства** заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

Отметим, что, согласно (2.9), импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю.

В механике Галилея - Ньютона из-за независимости массы от скорости импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс.

Центром масс или **центром инерции** системы материальных точек называется воображаемая точка C , положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус - вектор равен

$$\vec{r}_c = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m_i и \vec{r}_i - соответственно масса и радиус-вектор i -и материальной точки;

n - число материальных точек в системе; $m = \sum_{i=1}^n m_i$ - масса системы.

$$\text{Скорость центра масс } \vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i}{m},$$

Учитывая, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, а $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ есть импульс \vec{p} системы, можно написать

$$\vec{p} = m\vec{v}_c, \quad (2.10)$$

т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Подставив выражение (2.10) в уравнение (2.9), получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (2.11)$$

т.е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Выражение (2.11) представляет собой **закон движения центра масс**.

В соответствии с (2.10) из закона сохранения импульса вытекает, что центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.

3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

3.1. Энергия, работа, мощность

Энергия - универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др.

В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других - переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы.

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила \vec{F} , которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы \vec{F}_s на направление перемещения $\vec{F}_s = F \cos \alpha$ умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = F_s s = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \quad (3.1)$$

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому формулой (3.1) пользоваться нельзя. Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение $d\vec{r}$, то силу \vec{F} можно считать постоянной, а движение точки ее приложения - прямолинейным. Элементарной работой силы \vec{F} на перемещение $d\vec{r}$ называется скалярная величина

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot \cos \alpha \cdot ds = F_s ds,$$

где α - угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$; $ds = |dr|$ - элементарный путь; F_s - проекция вектора \vec{F} на вектор $d\vec{r}$ (рис.12).

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F \cdot ds \cdot \cos \alpha = \int_1^2 F_s ds. \quad (3.2)$$

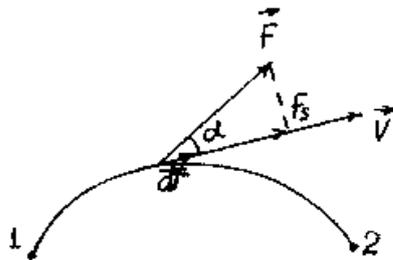


Рис. 12

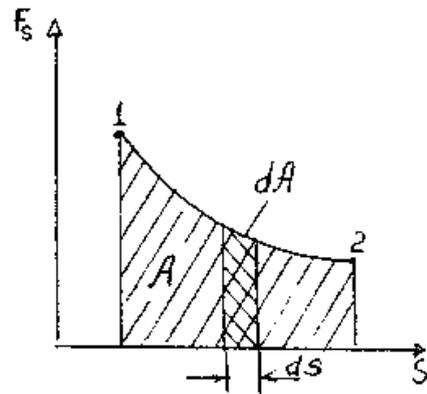


Рис. 13

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы F от пути s вдоль траектории 1-2. Пусть эта зависимость представлена графически (рис.13), тогда искомая работа A определяется на графике площадью закрашенной фигуры. Если, например, тело движется прямолинейно, сила $F = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, то получим

$$A = \int_1^2 F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F \cos \alpha \int_1^2 ds = F \cdot s \cdot \cos \alpha,$$

где s - пройденный телом путь (см. также формулу (3.1)).

Из формулы (3.1) следует, что при $\alpha < \frac{\pi}{2}$ работа силы положительна, в этом случае составляющая F_s совпадает по направлению с вектором скорости движения v (рис.12).

Если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то работа силы отрицательна. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.

Единица работы - джоуль (Дж): 1 Дж - работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м (1 Дж = 1 Н·м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие **мощности**:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (3.3)$$

За время dt сила \vec{F} совершает работу $\vec{F}d\vec{r}$, и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v},$$

т.е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; N - величина скалярная.

Единица мощности – **ватт** (Вт): 1 Вт - мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

3.2. Кинетическая и потенциальная энергии

Кинетическая энергия механической системы - это энергия механического движения этой системы.

Сила \vec{F} , действующая на покоящееся тело и вызывающая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает, на величину затраченной работы. Таким образом, работа dA силы \vec{F} на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до \vec{v} , идет на увеличение кинетической энергии dT тела, т.е. $dA = dT$.

Используя второй закон Ньютона $F = \frac{md\vec{v}}{dt}$ и умножая обе части равенства

на перемещение $d\vec{r}$, получим

$$\vec{F}d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = dA.$$

Так как $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то $dA = m\vec{v}d\vec{v} = m\vartheta d\vartheta = dT$,

откуда

$$T = \int_0^{\vartheta} m\vartheta d\vartheta = \frac{m\vartheta^2}{2}.$$

Таким образом, тело массой m , движущееся со скоростью ϑ , обладает кинетической энергией

$$T = \frac{m\vartheta^2}{2}. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.4) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т.е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

Потенциальная энергия - механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля упругих сил, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие поля называются **потенциальными**, а силы, действующие в них, - **консервативными**. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной**; ее примером является сила трения.

Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией Π . Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, т.к. работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = -d\Pi. \quad (3.5)$$

Работа dA выражается как скалярное произведение силы \vec{F} на перемещение $d\vec{r}$, и выражение (3.5) можно записать в виде

$$\vec{F}d\vec{r} = -d\Pi. \quad (3.6)$$

Следовательно если известна функция $\Pi(r)$, то из формулы (3.6) можно найти силу \vec{F} по модулю и направлению.

Потенциальная энергия может быть определена исходя из (3.6) как

$$\Pi = -\int \vec{F}d\vec{r} + C,$$

где C - постоянная интегрирования, т.е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Это, однако, не отражается на физических законах, т.к. в них входит или разность потенциальных энергий в двух положениях тела, или производная Π по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Для консервативных сил

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

или в векторном виде

$$\vec{F} = -\text{grad}\Pi, \quad (3.7)$$

где

$$\text{grad}\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \vec{k} \quad (3.8)$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы координатных осей). Вектор, определяемый выражением (3.8), называется **градиентом скаляра Π** . Для него наряду с обозначением $\text{grad} \Pi$ применяется также обозначение $\nabla \Pi$. ∇ ("набла"), что означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона, или **набла-оператором**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (3.9)$$

Конкретный вид функции Π зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли, равна

$$\Pi = mgh, \quad (3.10)$$

где высота h отсчитывается от нулевого уровня, для которого $\Pi=0$. Выражение (3.10) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты h на поверхность Земли.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (кинетическая энергия всегда положительна!). Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина h'), $\Pi = -mgh'$.

Найдем потенциальную энергию упругодеформированного тела (пружины). Сила упругости пропорциональна деформации:

$$F_{x \text{ упр}} = -kx,$$

где $F_{x \text{ упр}}$ - проекция силы упругости на ось x ; k - **коэффициент упругости** (для пружины - **жесткость**), а знак минус указывает, что $F_{x \text{ упр}}$ направлена в сторону, противоположную деформации x .

По третьему закону Ньютона деформирующая сила равна по модулю силе упругости противоположно ей направлена, т.е.

$$F_x = -F_{x \text{ упр}} = kx$$

Элементарная работа dA , совершаемая силой F_x при бесконечно малой деформации dx , равна

$$dA = F_x dx = kx \cdot dx,$$

а полная работа

$$A = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{kx^2}{2}$$

идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Таким образом, потенциальная энергия упруго деформированного тела $\Pi = \frac{kx^2}{2}$.

Потенциальная энергия системы, подобно кинетической энергии, является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам. **Полная механическая энергия системы** – энергия механического движения и взаимодействия: $E=T+\Pi$, т.е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

3.3. Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии - результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М.В.Ломоносову (1711 - 1765 гг.), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814 -1878 гг.) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821 - 1894 гг.).

Рассмотрим систему материальных точек массами m_1, m_2, \dots, m_n , движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Пусть $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ – равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$. При $u \ll c$ массы материальных точек постоянны, и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}'_1 + \vec{F}_1 + \vec{f}_1, \\ \frac{m_2 d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}'_2 + \vec{F}_2 + \vec{f}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{m_n d\vec{v}_n}{dt} &= \vec{F}'_n + \vec{F}_n + \vec{f}_n. \end{aligned}$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени dt совершают перемещения, соответственно равные $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$. Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $d\vec{r}_1 = \vec{v}_1 dt$, получим:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 d\vec{v}_1 &= \vec{F}'_1 + \vec{F}_1 d\vec{r}_1 = \vec{f}_1 d\vec{r}_1, \\ m_2 \vec{v}_2 d\vec{v}_2 &= \vec{F}'_2 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 = \vec{f}_2 d\vec{r}_2, \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m_n \overline{v}_n d\overline{v}_n - \overline{K}'_n + \overline{F}_n d\overline{r}_n = \overline{f}_n d\overline{r}_n.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^n m_i \overline{v}_i d\overline{v}_i - \sum_{i=1}^n \overline{K}'_i + \overline{F}_i d\overline{r}_i = \sum_{i=1}^n \overline{f}_i d\overline{r}_i. \quad (3.11)$$

Первый член левой части равенства (3.11)

$$\sum_{i=1}^n m_i \overline{v}_i d\overline{v}_i = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i \overline{v}_i^2}{2}\right) = dT,$$

где dT есть приращение кинетической энергии системы. Второй член $\sum_{i=1}^n \overline{K}'_i + \overline{F}_i d\overline{r}_i$ равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком минус, т.е. равен элементарному приращению потенциальной энергии $d\Pi$ системы (3.5).

Правая часть равенства (3.11) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, имеем

$$d(T+\Pi)=dA. \quad (3.12)$$

При переходе системы из состояния 1 в какое-либо состояние 2

$$\int_1^2 d(T + \Pi) = A_{12},$$

т.е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (3.12) следует, что $d(T+\Pi)=0$, откуда

$$T+\Pi = E = \text{const}, \quad (3.13)$$

т.е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной. Выражение (3.13) представляет собой **закон сохранения механической энергии**: в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**. Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени, т.е. инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Существует еще один вид систем – **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название **диссипации** (или **рассеяния**) энергии. Строго говоря, все силы в природе являются

диссипативными. В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия остается неизменной. Поэтому, как указывает Ф.Энгельс, этот закон не есть просто закон количественного сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и качественную сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Закон превращения и сохранения энергии - фундаментальный закон природы, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микроскопических тел.

В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например, силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при исчезновении механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии - сущность неуничтожимости материи и ее движения.

3.4. Графическое представление энергии

Во многих задачах просматривается одномерное движение тела, потенциальная энергия которого является функцией лишь одной переменной (например, координаты x), т.е. $\Pi = \Pi(x)$. График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента называется **потенциальной кривой**.

Анализ потенциальных кривых позволяет определить характер движения тела. Будем рассматривать только консервативные системы, т.е. системы, в которых взаимные превращения механической энергии в другие виды отсутствуют. Тогда справедлив закон сохранения энергии в форме (3.13). Рассмотрим графическое представление потенциальной энергии для тела в однородном поле тяжести и для упруго деформированного тела. Потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли, согласно (3.10), $\Pi(h) = mgh$.

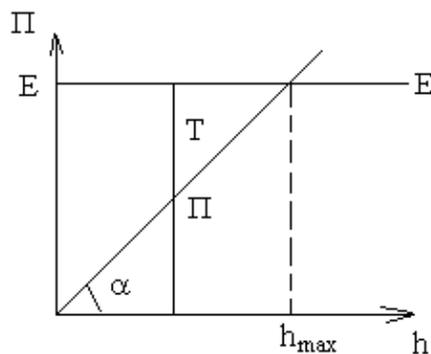


Рис. 14

График данной зависимости $\Pi = \Pi(h)$ - прямая линия, проходящая через начало координат (рис.14), угол наклона которой к оси h тем больше, чем больше масса тела, т.к.

$$\operatorname{tg} \alpha = mg .$$

3.5. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Удар (или **соударение**)- это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Исходя из данного определения, кроме явлений, которые можно отнести к ударам в прямом смысле этого слова (столкновение атомов или бильярдных шаров), сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и др. При ударе в телах возникают столь значительные внутренние силы, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет рассматривать соударяющиеся тела как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально гладких поверхностей. Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется **коэффициентом восстановления ε** :

$$\varepsilon = \frac{U'_N}{U_N}.$$

Если для сталкивающихся тел $\varepsilon=0$, то такие тела называются **абсолютно неупругими**, если $\varepsilon=1$ – **абсолютно упругими**. На практике для всех тел $0<\varepsilon<1$ (например, для стальных шаров $\varepsilon\approx 0.56$, для шаров из слоновой кости $\varepsilon\approx 0.89$, для свинца $\varepsilon\approx 0$). Однако в некоторых случаях тела можно с большой точностью рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара**. Удар называется **центральный**, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс. Мы будем рассматривать только центральные абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

Абсолютно упругий удар - столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию. Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Обозначим скорости шаров массами m_1 и m_2 до удара через \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , после удара - через \vec{u}_1 и \vec{u}_2 (рис. 15).

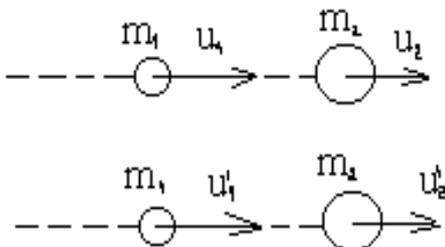


Рис. 15

При прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту линию равны модулям скоростей.

Их направления учтем знаками: положительное значение припишем движению вправо, отрицательное - движению влево.

При указанных допущениях законы сохранения имеют вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (3.14)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (3.15)$$

Произведя соответствующие преобразования в выражениях (3.14) и (3.15), получим

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2), \quad (3.16)$$

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2). \quad (3.17)$$

откуда

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2), \quad (3.18)$$

Решая уравнения (3.16) и (3.18), находим

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \bar{v}_1 + \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.19)$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \bar{v}_2 + \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.20)$$

Разберем несколько примеров.

1. При $v_2 = 0$

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \bar{v}_1, \quad (3.21)$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.22)$$

Проанализируем выражения (3.21) и (3.22) для двух шаров различных масс:

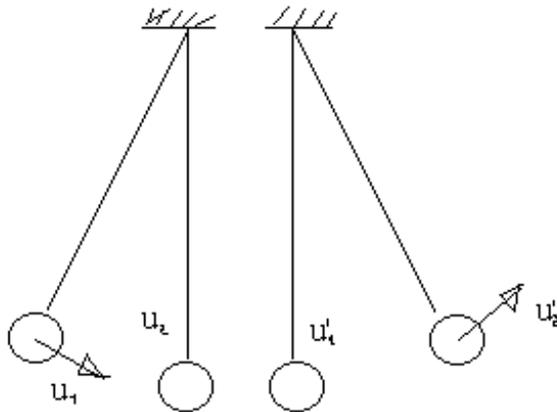


Рис. 16

а) $m_1 = m_2$. Если второй шар до удара висел неподвижно ($v_2 = 0$) (рис. 16), то после удара остановится первый шар ($u_1 = 0$), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара ($u_2 = v_1$);

б) $m_1 > m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ($u_1 < v_1$). Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого шара после удара ($u_2 > u_1$) (рис. 17).

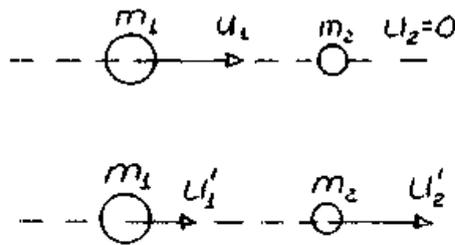


Рис.17

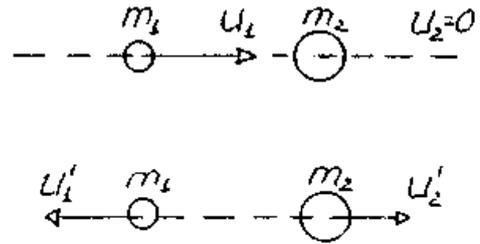


Рис.18

в) $m_1 < m_2$. Направление движения первого шара при ударе изменяется - шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью, т.е. $u_2 < v_1$ (рис. 18).

г) $m_2 \gg m_1$ (например, столкновение шара со стеной). Из уравнений (3.21) и (3.22) следует, что $u_1 = -v_1$, $u_2 \approx \frac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0$.

2. При $m_1 = m_2$ выражения (3.19) и (3.20) будут иметь вид

$$u_1 = v_2, u_2 = v_1,$$

т.е. шары равной массы «обмениваются» скоростями.

Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

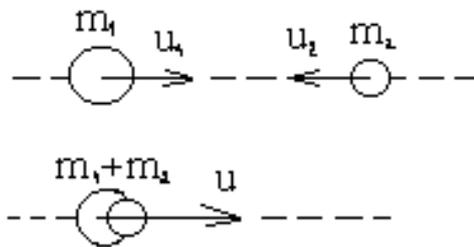


Рис. 19

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (рис.19).

Если массы шаров m_1 и m_2 , их скорости до удара \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , то, используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v},$$

Откуда

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.23)$$

Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы шаров равны $m_1 = m_2$, то

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

Выясним, как изменяется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то

мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит "потеря" кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии.

Эту потерю можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{m_1 + m_2}{2} \bar{v}^2.$$

Используя (3.23), получим

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($U_2 = 0$), то

$$u = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}, \quad \Delta T = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Когда $m_2 \gg m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $u \ll v_1$ и почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Наоборот, при забивании гвоздей в стену масса молотка должна быть гораздо большей ($m_1 \gg m_2$), тогда $u \approx v_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение гвоздя, а не на остаточную деформацию стены.

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит "потеря" механической энергии под действием диссипативных сил.

4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Момент инерции

При изучении вращения твердого тела пользуются понятием момента инерции. Моментом инерции системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведения масс m материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J = \int r^2 dm,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина r в этом случае есть функция положения точки с координатами x, y, z .

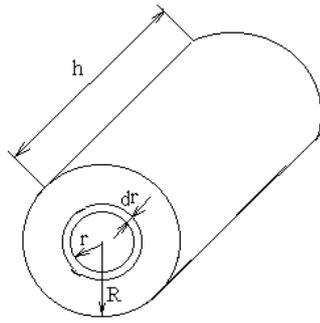


Рис. 20

В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой h и радиусом R относительно его геометрической оси (рис.20). Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним — $r+dr$.

Момент инерции каждого полого цилиндра $dJ=r^2dm$ (т.к. $dr \ll r$, то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно r), где dm - масса всего элементарного цилиндра; его объем $2\pi r h dr$. Если ρ - плотность материала, то $dm=\rho 2\pi r h dr$ и $dJ=2\pi \rho h r^3 dr$. Тогда момент инерции сплошного цилиндра

$$J = \int dJ = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi h r^4 \rho}{2},$$

но т.к. $\pi r^2 h$ - объем цилиндра, то его масса $m=\pi r^2 h \rho$, а момент инерции $J = \frac{m r^2}{2}$.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**: момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$J = J_c + m a^2. \quad (4.1)$$

4.2. Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся около неподвижной оси z , проходящей через него (рис.21).

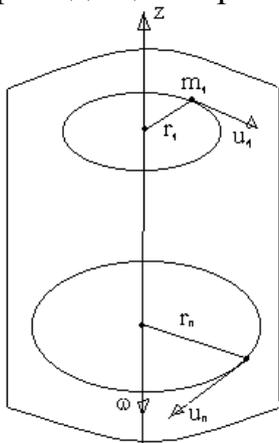


Рис. 21

Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами m_1, m_2, \dots, m_n , находящимися на расстоянии r_1, r_2, \dots, r_n , от оси вращения. При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами m_i опишут окружности различных радиусов r_i с различными линейными скоростями u_i .

Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова:

$$\omega = \frac{\vartheta_1}{r_1} = \frac{\vartheta_2}{r_2} = \dots = \frac{\vartheta_n}{r_n}. \quad (4.2)$$

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1 \vartheta_1^2}{2} + \frac{m_2 \vartheta_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n \vartheta_n^2}{2} \quad \text{или} \quad T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vartheta_i^2}{2}$$

Используя выражение (4.2), получим

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \omega^2 \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z - момент инерции тела относительно оси z . Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела равна

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (4.3)$$

Из сравнения формулы (4.3) с выражением (3.4) для кинетической энергии тела, движущегося поступательно $T = \frac{m \vartheta^2}{2}$ следует, что момент инерции вращательного движения - мера инертности тела. Формула (4.3) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. В случае цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии вращения и энергии поступательного движения.

$$T = \frac{m \vartheta_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

где m - масса скатывающегося тела; v_c - скорость центра масс тела; J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр его масс; ω - угловая скорость тела.

4.3. Момент силы.

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Моментом силы \vec{F} относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса - вектора \vec{r} , проведенного из точки O в точку A приложения силы, на силу \vec{F} (рис.22): $M = [\vec{r} \vec{F}]$.

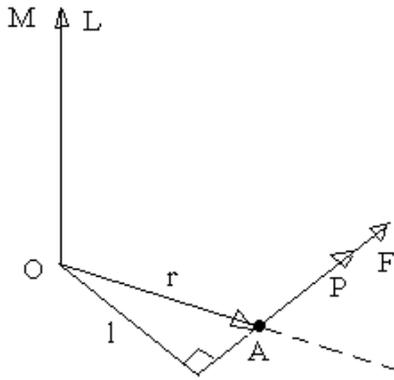


Рис. 22

Здесь \vec{M} – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при вращении от \vec{r} к \vec{F} . Модуль момента силы:

$M = F \sin \alpha = Fl$, где α – угол между \vec{r} и \vec{F} ; $r \sin \alpha = l$ – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O – плечо силы.

Моментом силы относительно неподвижной оси является скалярная величина M_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{M} момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси z (рис. 23). Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки O на оси z.

Если ось z совпадает с направлением вектора \vec{M} , то момент, силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью: $M_z = [\vec{r} \vec{F}]_z$.

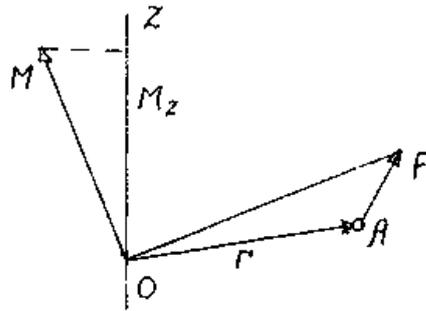


Рис. 23

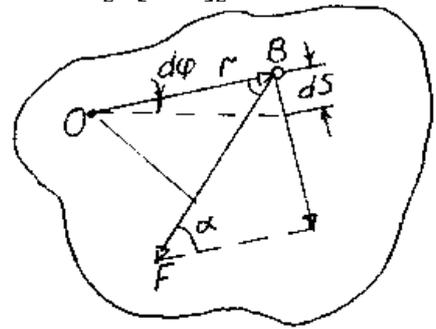


Рис. 24

Найдем выражение для работы при вращении тела (рис. 24). Пусть сила \vec{F} приложена в точке B, находящейся от оси вращения на расстоянии r, α – угол между направлением силы и радиусом-вектором \vec{r} . Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела.

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения B проходит путь $ds = r d\varphi$, и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi. \quad (4.4)$$

Так как $F r \sin \alpha = Fl = M_z$ – момент силы относительно оси Z, то можно записать, что $dA = M_z d\varphi$. Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dT, \text{ но } dT = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega, \text{ поэтому } M_z d\varphi = J_z \omega d\omega \text{ или}$$

$$M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, получим

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси. Можно показать, что если ось вращения совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon},$$

где J - главный момент инерции тела (момент инерции относительно главной оси).

4.4. Момент импульса и закон его сохранения

При сравнении законов поступательного и вращательного движений просматривается аналогия между ними, только во вращательном движении вместо силы "выступает" ее момент, роль массы играет момент инерции. Какая же величина будет аналогом импульса тела? Ею является момент импульса тела относительно оси.

Моментом импульса (количество движения) материальной точки A относительно **неподвижной** точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = \vec{r} \vec{p} = \vec{r} m \vec{v},$$

где \vec{L} – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от \vec{r} к \vec{p} ; \vec{r} - радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A ; $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс материальной точки (рис.22).

Модуль вектора момента импульса:

$$L = r p \sin \alpha = m r v \sin \alpha = p l,$$

где α - угол между векторами \vec{r} и \vec{p} , l - плечо вектора \vec{p} относительно точки O .

Моментом импульса относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина L_z , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно точки O данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки O на оси z .

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси z каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r с некоторой скоростью \vec{v}_i . Скорость \vec{v}_i и импульс $m_i \vec{v}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i \vec{v}_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы.

$$L_{iz} = m_i \vartheta_i r_i \quad (4.6)$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i \vartheta_i r_i.$$

Используя формулу $\vartheta_i = \omega r_i$, получим $L_z = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega$,

т.е.
$$L_z = J_z \omega. \quad (4.7)$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Продифференцируем уравнение (4.7) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$

т.е.
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Это выражение – еще одна форма **уравнения (закона) динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси. Можно показать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.8)$$

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда

$$\vec{L} = \text{const}. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) представляет собой **закон сохранения момента импульса**: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы. Он связан со свойством симметрии пространства – его изотропностью, т.е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Продемонстрировать закон сохранения момента импульса можно с помощью скамьи Жуковского. Пусть человек, сидящий на скамье, которая без трения вращается вокруг вертикальной оси, и держащий в вытянутых руках гантели приведен во вращение с угловой скоростью ω .

Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил равен нулю, момент импульса системы сохраняется, и угловая скорость вращения ω_2 возрастает. Гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить свой момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2 \text{ и } J_1 \gg J_2 \rightarrow \omega_1 \ll \omega_2.$$

4.5. Сила тяжести и вес. Невесомость

На любое тело, расположенное вблизи Земли, действует сила тяготения F , под влиянием которой, согласно второму закону Ньютона, тело начнет двигаться с ускорением свободного падения g . Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой m действует сила $\vec{P} = m\vec{g}$, называемая **силой тяжести**. Согласно фундаментальному физическому закону – **обобщенному закону Галилея**, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от $g=9,78 \text{ м/с}^2$ на экваторе до $g=9,832 \text{ м/с}^2$ на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли - с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно 6378 км и 6357 км). Так как различие значений g невелико, ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, и принимается равным $9,81 \text{ м/с}^2$.

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой:

$$P = mg = F = \frac{GmM}{R^2},$$

где M - масса Земли; R - расстояние между телом и центром Земли, т.е. $R=R_0+h$, где R_0 - радиус Земли, h - высота тела над поверхностью Земли.

В физике применяется также понятие веса тела. **Весом** тела называют силу, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую его от свободного падения. Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением, отличным от \vec{g} , т. е. когда на него, кроме силы тяжести, действуют другие силы. Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием **невесомости**. Таким образом сила тяжести действует всегда, а вес появляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести, действуют еще и другие силы, вследствие чего тело движется с ускорением \vec{a} , отличным от \vec{g} . Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением $\vec{a} \neq \vec{g}$, то к этому телу приложена дополнительная сила N , удовлетворяющая условию

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}.$$

Тогда вес тела $\vec{P}' = -\vec{N} = \vec{P} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$, т.е. если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то $a=0$ и $P=mg$. Если тело свободно движется в поле тяготения по любой траектории и в любом направлении, то $\vec{a} = \vec{g}$ и $P=0$, т.е. тело будет невесомым. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

5.1. Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например, качание маятника часов, переменный электрический ток и т.д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и другие. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Отсюда следует целесообразность единого подхода в изучении колебаний различной физической природы.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** - колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса). Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам: колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому; различные **периодические процессы** можно представить как наложение гармонических колебаний. Гармонические колебания величины s описываются уравнением типа

$$s = A \cos \omega_0 t + \varphi, \quad (5.1)$$

где A – максимальное значение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебаний**; ω_0 – **круговая (циклическая) частота**; φ – **начальная фаза колебаний**; в момент времени $t=0$; $\omega_0 t + \varphi$ – **фаза колебаний** в момент времени t . Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то S может принимать значения от $+A$ до $-A$.

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T , называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение 2π , т.е.

$$\omega_0(t + T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi,$$

откуда
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5.2)$$

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (5.3)$$

т.е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний**. Сравнивая (5.3) и (5.2), получим $\omega_0 = 2\pi\nu$.

Единица частоты – **герц (Гц)**: 1 Гц - частота периодического процесса, при котором за 1 с совершается один цикл процесса.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины s (соответственно скорость и ускорение):

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + \varphi \equiv A\omega_0 \cos \left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin \omega_0 t + \varphi \equiv A\omega_0^2 \cos \omega_0 t + \varphi + \pi \quad (5.5)$$

т.е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой. Амплитуды величин (5.4) и (5.5) соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$.

Фаза скорости (5.4) отличается от фазы величины (5.1) на $\frac{\pi}{2}$, а фаза ускорения (5.5) отличается от фазы величины (5.1) на π .

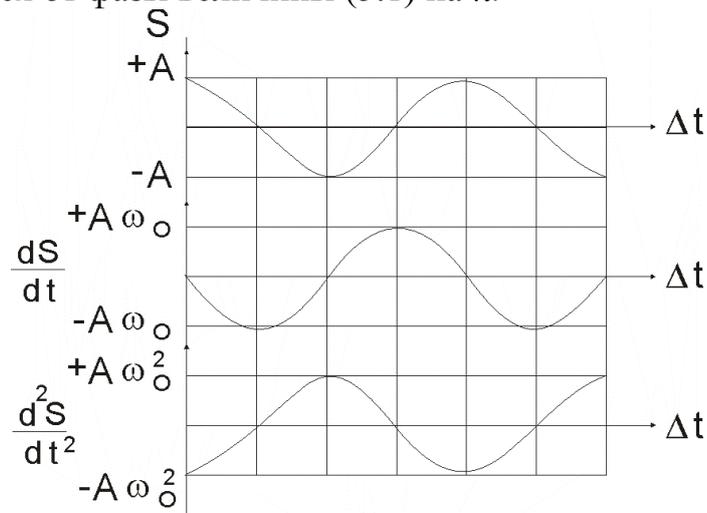


Рис. 25

Следовательно, в момент времени, когда $s=0$, $\frac{ds}{dt}$ приобретает наибольшие значения, когда же s достигает максимального отрицательного значения, то $\frac{d^2s}{dt^2}$ приобретает наибольшее положительное значение (рис. 25).

Из выражения (5.5) следует **дифференциальное уравнение** гармонических колебаний

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0, \quad (5.6)$$

где учтено, что $s = A \cos \omega_0 t + \varphi$. Решением этого уравнения является выражение (5.1).

Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды**, или **методом векторных диаграмм**. Для этого из произвольной точки O , выбранной на оси x , под углом φ , равным начальной фазе колебаний, откладывается вектор A , модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания (рис. 26). Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω_0 , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси

x и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина будет изменяться со временем по закону

$$s = A \cos \omega_0 t + \varphi$$

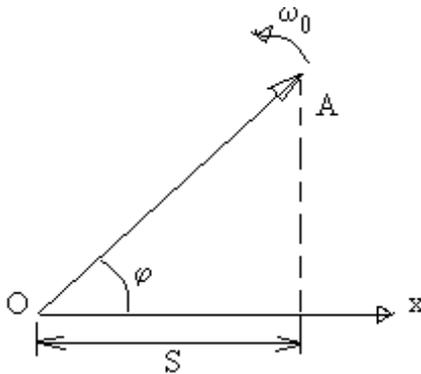


Рис. 26

Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вектора амплитуды A , отложенного из произвольной точки оси под углом φ , равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω_0 вокруг этой точки.

5.2. Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат x около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты x от времени t задается уравнением, аналогичным уравнению (5.1), где $s=x$:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (5.7)$$

Согласно выражениям (5.4) и (5.5), скорость v и ускорение a колеблющейся точки соответственно равны:

$$v = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + \varphi = A\omega_0 \cos \left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$a = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t + \varphi = A\omega_0^2 \cos \left(\omega_0 t + \varphi + \pi \right). \quad (5.8)$$

Сила $F=ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m , с учетом (5.1) и (5.8) равна

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t + \varphi}{2}. \quad (5.9)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F , равна

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \varphi}{2}. \quad (5.10)$$

Сложив (5.9) и (5.10), получим формулу для полной энергии

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (5.11)$$

Полная энергия остается постоянной, т.к. при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

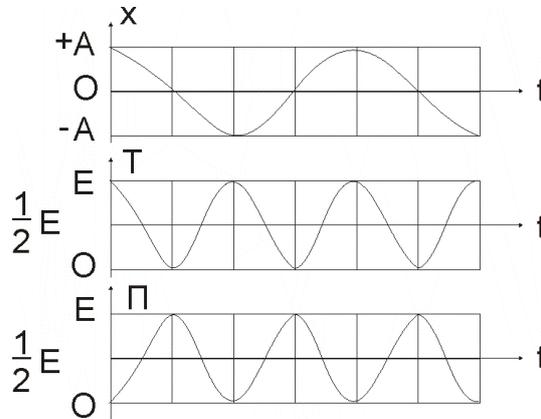


Рис. 27

На рис. 27 представлены графики зависимости x , T и Π от времени:

5.3. Гармонический осциллятор.

Пружинный, физический и математический маятники

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида (5.6):

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (5.12)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники.

Пружинный маятник – это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где k – коэффициент упругости, в случае пружины называемый **жесткостью**. Уравнение движения маятника

$$m\ddot{x} = -kx$$

или

$$\ddot{x} + \frac{kx}{m} = 0.$$

Из выражений (5.12) и (5.1) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону $x = A \cos \omega_0 t + \varphi$ с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.13)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.14)$$

Формула (5.14) справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука, т.е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела.

Потенциальная энергия пружинного маятника, согласно (5.10) и (5.13), равна

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

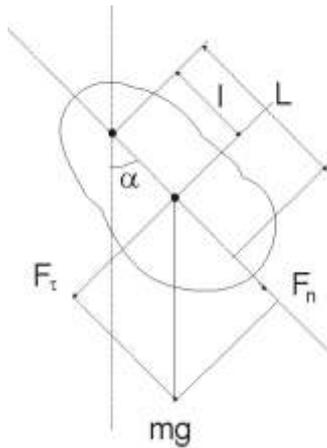


Рис. 28

Физический маятник – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс C тела (рис. 28).

Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол α , то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела

(4.5) момент M вращающей силы можно записать в виде

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = Fl = -mg l \sin \alpha \approx -mg l \alpha, \quad (5.15)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O , l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника, $F_t = -mg \sin \alpha \approx -mg \alpha$ – возвращающая сила (знак минус обусловлен тем, что направление F_t и α всегда противоположны; $\sin \alpha \approx \alpha$ соответствует малым отклонениям маятника из положения равновесия).

Уравнение (5.15) можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} + mg l \alpha = 0$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mg l \alpha}{J} = 0.$$

Принимая

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg l}{J}}, \quad (5.16)$$

получим уравнение $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$, идентичное (5.12), решение которого (5.1) известно:

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega_0 t + \varphi_0. \quad (5.17)$$

Из выражения (5.17) следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 (см. (5.18)) и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (5.18)$$

где $L = \frac{J}{m\ell}$ – **приведенная длина физического маятника**.

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

Момент инерции математического маятника

$$J = m\ell^2, \quad (5.19)$$

где ℓ – длина маятника.

Так как математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, предположив, что вся его масса сосредоточена в одной точке – центре его масс, то, подставив выражение (5.19) в формулу (5.18), получим выражение для периода малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (5.20)$$

Сравнивая формулы (5.18) и (5.20), видим, что если приведенная длина L физического маятника равна длине ℓ математического маятника, то их периоды колебания одинаковы. Следовательно, **приведенная длина математического маятника** – это длина математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

5.4. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \omega_0 t + \varphi_1 \\ x_2 &= A_2 \cos \omega_0 t + \varphi_2 \end{aligned}$$

воспользовавшись методом вращающегося вектора амплитуды.

Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис. 29). Так как векторы A_1 и A_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то разность фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$)

между ними остается постоянной. Очевидно, что уравнение результирующего колебания будет:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_0 t + \varphi. \quad (5.21)$$

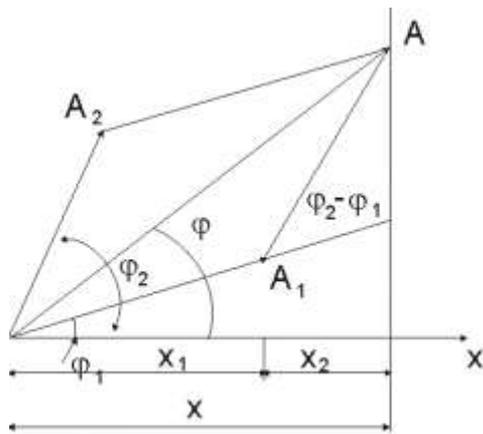


Рис. 29

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармонические колебания в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний.

Проанализируем выражение (5.22) в зависимости от разности фаз $\varphi_2 - \varphi_1$:

1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тогда $A = A_1 + A_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тогда $A = |A_1 - A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих двух колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A , а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$ причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$x_1 = A \cos \omega t,$$

$$x_2 = A \cos (\omega + \Delta\omega) t.$$

Складывая эти выражения и учитывая, что во втором множителе $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$, найдем

$$x = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right) \cos \omega t. \quad (5.23)$$

Получившееся выражение есть произведение двух колебаний. Так как $\Delta\omega \ll \omega$, то множитель, стоящий в скобках, почти не изменяется, когда множитель $\cos \omega t$ совершит несколько полных колебаний. Поэтому результи-

рующее колебание x можно рассматривать как гармоническое с частотой ω , амплитуда A_σ которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_\sigma = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right|. \quad (5.24)$$

Частота изменения A_σ в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т.е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_\sigma = \Delta\omega$. Период биений $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$. Характер зависимости (5.23) показан на рис. 30, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания (5.23), а огибающие их - график медленно меняющейся по уравнению (5.24) амплитуды.

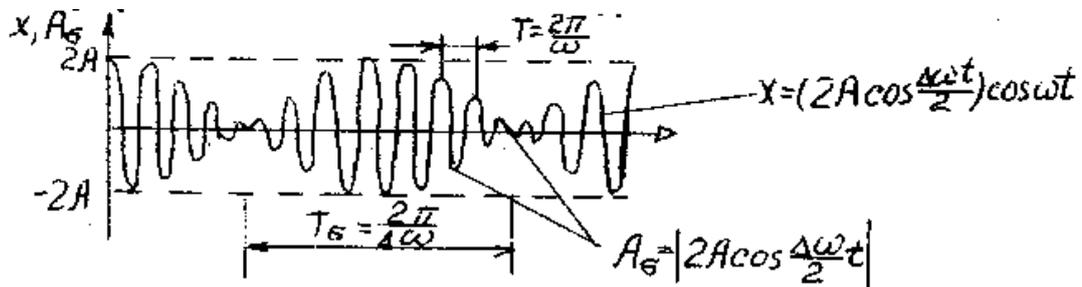


Рис.30

Определение частоты тона биений между эталонным и измеряемым колебаниями - наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

5.5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y . Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t, \\ y &= B \cos \omega t + \varphi. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Разность фаз обоих колебаний равна φ , A и B - амплитуды складываемых колебаний.

Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений (5.25) параметра t . Записывая складываемые колебания в виде

$$\begin{aligned} \frac{x}{A} &= \cos \omega t; \\ \frac{y}{B} &= \cos \omega t + \varphi = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi \end{aligned}$$

и изменяя во втором уравнении $\cos\omega t$ на x/A и $\sin\omega t$ на $\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$, получим после несложных преобразований уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi. \quad (5.26)$$

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются **эллиптически поляризованными**.

Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз φ . Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

1. $\varphi = m\pi$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В данном случае эллипс вырождается в отрезок прямой

$$y = \pm \frac{B}{A}x, \quad (5.27)$$

где знак плюс соответствует нулю и четным значениям m (рис.31, а), а знак минус - нечетным значениям m (рис. 31, б). Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$, совершающимся вдоль прямой (5.27), составляющей с осью x угол $\varphi = \arctg\left(B \cos m \frac{\pi}{A}\right)$.

В данном случае имеем дело с **линейно поляризованными колебаниями**.

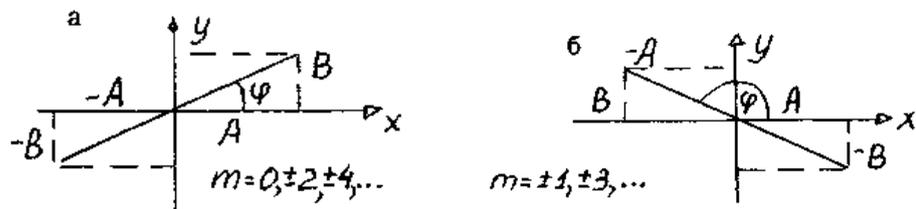


Рис.31

2. $\varphi = 2m + 1 \frac{\pi}{2}$ $m = 0, \pm 1, \dots$. В данном случае уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (5.28)$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 32).

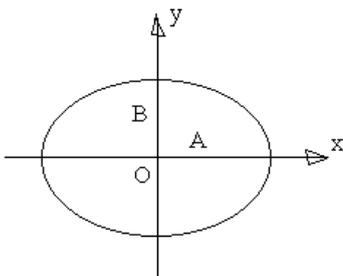


Рис. 32

Кроме того, если $A=B$, то эллипс вырождается в окружность. Такие колебания называются **циркулярно поляризованными колебаниями** или **колебаниями поляризованными по кругу**.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются **фигурами Лиссажу**. Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис. 33 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны вверх).

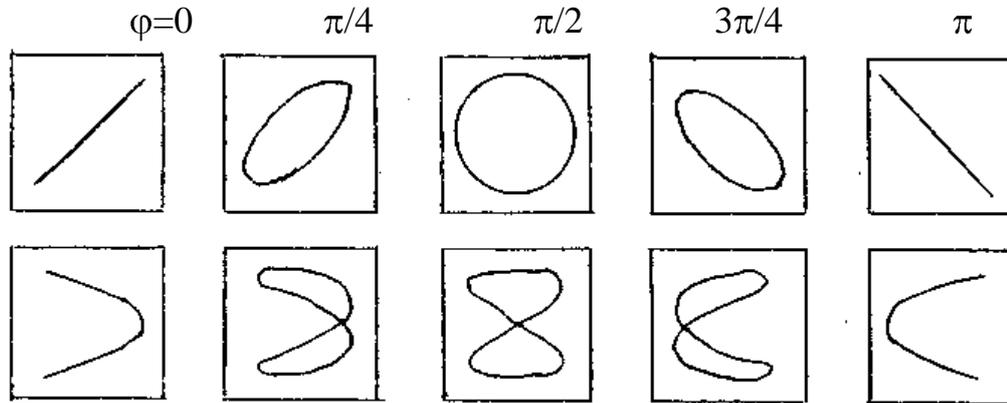


Рис. 33

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу - широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний.

5.6. Свободные затухающие колебания. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний. Автоколебания.

Рассмотрим свободные **затухающие колебания** – колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается. Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является ее превращение в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах, а также омических потерь и излучения электромагнитной энергии в электрических колебательных системах.

Для пружинного маятника массой m , совершающего малые колебания под действием упругой силы $F = -kx$, сила трения пропорциональна скорости, т.е.

$$F_{\text{тр}} = -r\dot{x} = -r\dot{x},$$

где r – **коэффициент сопротивления**; знак минус указывает на противоположные направления силы трения и скорости. При данных условиях закон движения маятника будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (5.29)$$

Используя формулу $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и принимая, что коэффициент затухания

$$\delta = \frac{r}{2m}, \quad (5.30)$$

получим дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.31)$$

где x - колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс, $\delta = \text{const}$ - **коэффициент затухания**, ω_0 - циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы, т.е. при $\delta=0$ (при отсутствии потерь энергии) называется **собственной частотой** колебательной системы.

Решение уравнения (5.31) в случае малых затуханий ($\delta \ll \omega_0^2$):

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.32)$$

$$\text{где } A = A_0 e^{-\delta t} \quad (5.33)$$

– **амплитуда затухающих колебаний**, а A_0 - начальная амплитуда; ω_0 – частота

собственных колебаний; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$ - ω – частота затухающих колебаний, r – коэффициент сопротивления

Зависимость (5.32) показана на рис. 34 сплошной линией, а зависимость (5.33) - штриховыми линиями.

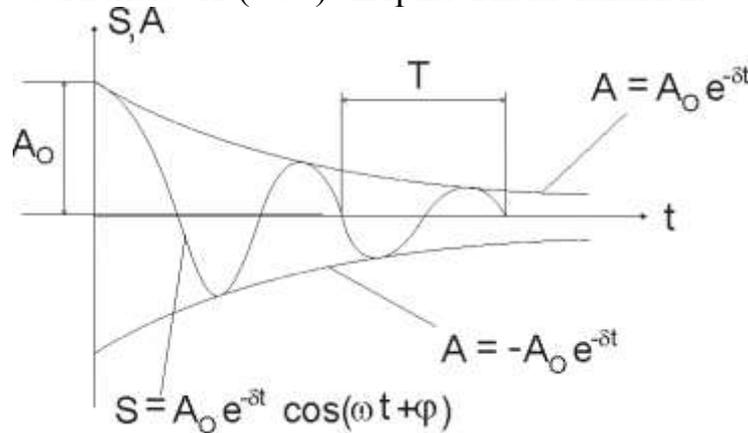


Рис. 34

Промежуток времени $\tau = \frac{1}{\delta}$ в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется **временем релаксации**.

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие, периода или частоты.

Однако, если затухание мало, то можно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или ми-

нимумами) колеблющейся физической величины (рис. 34). Тогда период затухающих колебаний с учетом формулы (5.31) равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Если $A(t)$ и $A(t + T)$ - амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\delta T}$$

называется **декрементом затухания**, а его логарифм

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (5.34)$$

логарифмическим декрементом затухания; N_e - число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз. Логарифмический декремент затухания – постоянная для данной колебательной системы величина.

Для характеристики колебательной системы пользуются понятием **добротности** Q , которая при малых значениях логарифмического декремента равна

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (5.35)$$

(т.к. затухание невелико $\delta^2 \ll \omega_0^2$, то T принято равным T_0).

Из формулы (5.35) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации.

Добротность пружинного маятника, согласно (5.35) и (5.30) $Q = \frac{1}{r} \sqrt{km}$.

Отметим, что с увеличением коэффициента затухания δ период затухающих колебаний растет, а при $\delta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим. В данном случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда $t \rightarrow \infty$. Процесс не будет колебательным. Он называется **апериодическим**.

Огромный интерес для техники представляет возможность поддерживать колебания незатухающими. Для этого необходимо восполнять потери энергии реальной колебательной системы. Особенно важны и широко применимы так называемые **автоколебания** - незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Автоколебания принципиально отличаются от свободных незатухающих колебаний, происходящих без действия сил, а также от вынужденных колебаний, происходящих под действием периодической силы. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями).

Примером автоколебательной системы могут служить часы. Храповой механизм подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Энергия, передаваемая

при этом маятнику, берется либо за счет раскручивающейся пружины, либо за счет опускающегося груза. Колебания воздуха в духовых инструментах и органных трубах также возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых воздушной струей.

Автоколебательными системами являются также двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины, ламповый генератор и т.д.

5.7. Вынужденные колебания.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение.

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью к.-л. периодически действующего фактора $x(t)$, изменяющегося по гармоническому закону:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t.$$

Если рассматривать механические колебания, то роль $x(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t, \text{ изменяющаяся с частотой } \omega \quad (5.36)$$

С учетом силы (5.36) закон движения для пружинного маятника запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t. \quad (5.37)$$

Используя (5.15) и (5.30), приходим к уравнению

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (5.38)$$

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся **силы**, называются **вынужденными механическими**.

Уравнение (5.38) можно свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = x_0 \cos \omega t, \quad (5.39)$$

применяя впоследствии его решение для вынужденных колебаний конкретной физической природы (x_0 в случае механических колебаний равно F_0/m).

Решение уравнения (5.39) равно сумме общего решения

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos \omega_1 t + \varphi_0 \quad (5.40)$$

однородного уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ и частного решения

$$x = \frac{x_0 \cos \left(\omega t - \frac{\arctg 2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (5.41)$$

неоднородного уравнения (5.39), где

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad (5.42)$$

$$\varphi = \frac{\arctg 2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.43)$$

Слагаемое (5.40) играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством (5.42).

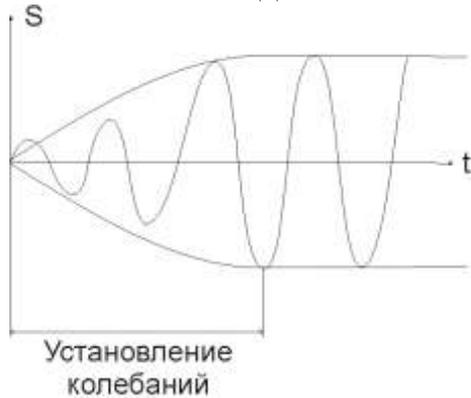


Рис. 35

Следовательно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой ω и являются гармоническими; амплитуда и фаза колебаний также зависят от ω . Графически вынужденные колебания представлены на рис. 35.

5.8. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс

Рассмотрим зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты ω .

Чтобы определить **резонансную частоту** $\omega_{\text{рез}}$ - частоту, при которой амплитуда A смещения достигает максимума, - нужно найти максимум функции или, что то же самое, минимум подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв к нулю, получим условие, определяющее $\omega_{\text{рез}}$:

$$-4\omega_0^2 - \omega^2 + 8\delta^2\omega = 0.$$

Это равенство выполняется при $\omega = 0, \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, у которого только лишь положительное значение имеет физический смысл. Следовательно, резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (5.44)$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом**. При $\delta^2 \ll \omega_0^2$ значение $\omega_{\text{рез}}$ практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы.

Подставляя (5.44) в формулу (5.42), получим

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}. \quad (5.45)$$

На рис. 36 приведена зависимость амплитуды колебаний от частоты при различных δ .

Из (5.44) и (5.45) вытекает что, чем меньше δ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Если $\omega \rightarrow 0$, то все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению x_0 / ω_0^2 так называемому **статическому отклонению**.

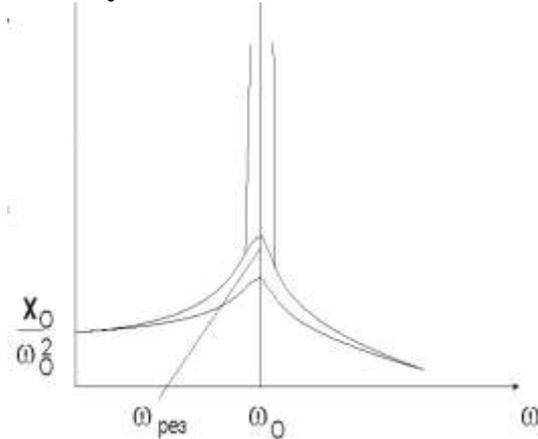


Рис. 36

Из формулы (5.46) вытекает, что при малом затухании $\delta^2 \ll \omega_0^2$ резонансная амплитуда смещения

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0 x_0}{2\delta\omega_0^2} = \frac{Qx_0}{\omega_0^2}, \quad (5.46)$$

где Q - добротность колебательной системы (5.35), $\frac{x_0}{\omega_0^2}$ - статическое отклонение.

Отсюда следует, что добротность Q характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше Q , тем больше $A_{\text{рез}}$.

Зависимость φ от ω при разных коэффициентах δ графически представлена на рис.37, из которого следует, что при изменении ω изменяется и сдвиг фаз φ .

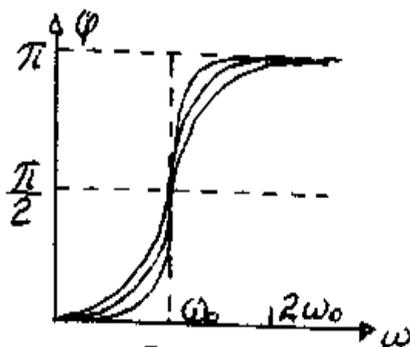


Рис. 37

Из формулы $\varphi = \frac{\text{arctg} 2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ вытекает, что при $\omega=0$ $\varphi=0$, а при $\omega=\omega_0$ независимо от значения коэффициента затухания $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. вынуждающая сила опережает вынуждающие по фазе колебания на $\frac{\pi}{2}$.

При дальнейшем увеличении ω сдвиг фаз возрастает и при $\omega \gg \omega_0$ $\varphi \rightarrow \pi$, т.е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы. Семейство кривых, изображенных на рис. 37, называется **фазовыми резонансными кривыми**.

Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы их собственная частота колебаний не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

6.1. Давление в жидкости и газе

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударения стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем.

Как и газ, жидкость принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

Хотя свойства жидкостей и газов во многом отличаются, в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому **гидроаэромеханика** - раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами, - использует единый подход к изучению жидкостей и газов.

В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как **сплошные**, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. Плотность жидкости мало зависит от давления. Плотность же газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что сжимаемостью жидкости и газа во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием **несжимаемой жидкости** - жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент ΔS с силами ΔF , которые, независимо от того как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS , т.к. наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется **давлением** p жидкости:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Единица давления – **паскаль** (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2 ($1\text{ Па}=1\text{ Н/м}^2$).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется **закону Паскаля**: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ вес $P=\rho gSh$, а давление на нижнее основание $p = \frac{P}{S} = \frac{\rho gSh}{S} = \rho gh$, т.е. давление изменяется линейно с высотой. Давление ρgh называется **гидростатическим давлением**.

Сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, определяемая **законом Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа): $F_A = \rho gV$, где ρ -плотность жидкости, V - объем погруженного в жидкость тела.

6.2. Уравнение неразрывности

Движение жидкостей называется **течением**, а совокупность частиц движущейся жидкости – **поток**. Графически движение жидкостей изображается с помощью **линий тока**, которые проводят так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 38). Линии тока проводят так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т.е. можно определить состояние движения жидкости. Линии тока в жидкости можно "проявить", например, подмешав в нее какое-либо заметные взвешенные частицы.

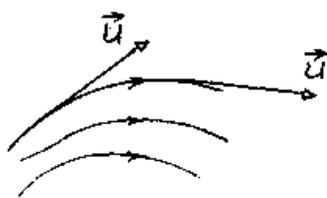


Рис. 38

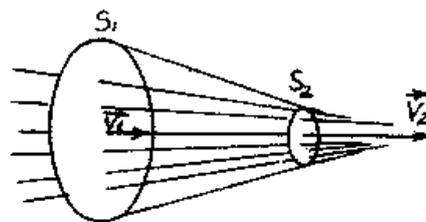


Рис.39

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют **трубкой тока**. Течение жидкости называется **установившимся** (или **стационарным**), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. Выберем два ее сечения S_1 и S_2 , перпендикулярные направлению скорости (рис. 39).

За время Δt через сечение S проходит объем жидкости $S \vartheta \Delta t$; следовательно, за 1 с через S_1 пройдет объем жидкости $S_1 \vartheta_1$, где ϑ_1 - скорость течения жидкости в месте сечения S . Через сечение S_2 за 1 с пройдет объем жидкости $S_2 \vartheta_2$, где ϑ_2 - скорость течения жидкости в месте сечения S_2 . Здесь предполагается, что скорость жидкости в сечении постоянна. Если жидкость несжимаема, то через сечение S_1 пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение S_2) т.е.

$$S_1 \vartheta_1 = S_2 \vartheta_2 = \text{const.} \quad (6.1)$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Соотношение (6.1) называется **уравнением неразрывности** для несжимаемой жидкости.

6.3. Уравнение Бернулли и следствия из него

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 , по которой слева направо течет жидкость. Пусть в месте сечения S_1 скорость течения ϑ_1 , давление p_1 и высота, на которой это сечение расположено, h_1 . Аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения ϑ_2 , давление p_2 и высота сечения h_2 . За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечений S_1 и S_2 к сечениям S'_1 и S'_2 .

Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии $E_2 - E_1$ идеально несжимаемой жидкости должно быть равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \quad (6.2)$$

где E_1 и E_2 - полная энергия жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 соответственно.

С другой стороны, A - это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2 , за рассматриваемый малый промежуток времени Δt . Для перенесения массы m от S_1 до S'_1 жидкость долж-

на переместиться на расстояние $l_1 = \vartheta_1 \Delta t$ и от S_2 до S_2' - на расстояние $l_2 = \vartheta_2 \Delta t$. Отметим, что l_1 и l_2 настолько малы, что всем точкам объемов, закрашенных на рис. 40, приписывают постоянные значения скорости ϑ , давления p и высоты h . Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad (6.3)$$

где $F_1 = p_1 S_1$, $F_2 = -p_2 S_2$ (отрицательна, т.к. направлена в сторону, противоположную течению жидкости, рис. 40).

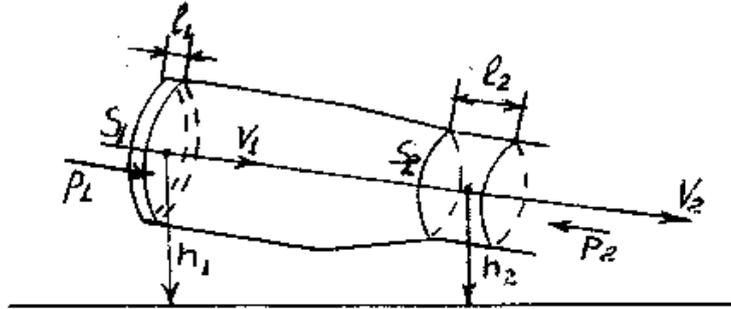


Рис.40

Полные энергии E_1 и E_2 будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:

$$E_1 = \frac{m\vartheta_1^2}{2} + mgh_1 \quad (6.4)$$

$$E_2 = \frac{m\vartheta_2^2}{2} + mgh_2. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.4) и (6.5) в (6.2) и приравнявая (6.2) и (6.3), получим

$$\frac{m\vartheta_1^2}{2} + mgh_1 + \rho_1 S_1 \vartheta_1 \Delta t = \frac{m\vartheta_2^2}{2} + mgh_2 + \rho_2 S_2 \vartheta_2 \Delta t. \quad (6.6)$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (6.1),

объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т.е.

$$\Delta V = S_1 \vartheta_1 \Delta t = S_2 \vartheta_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (6.6) на ΔV , получим

$$\frac{\rho\vartheta_1^2}{2} + \rho gh_1 + \rho_1 = \frac{\rho\vartheta_2^2}{2} + \rho gh_2 + \rho_2$$

где ρ - плотность жидкости. Но т.к. сечения выбирались произвольно, можно записать

$$\frac{\rho\vartheta^2}{2} + \rho gh + \rho = \text{const.} \quad (6.7)$$

Выражение (6.7) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли и называется **уравнением Бернулли**. Это выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина p в формуле (6.7) называется **статическим давлением**, величина $\frac{\rho v^2}{2}$ - **динамическим давлением**, величина ρgh представляет собой **гидростатическое давление**.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1=h_2$) выражение (6.7) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const},$$

где $\frac{\rho v^2}{2} + p$ - **полное давление**.

Из уравнения Бернулли (6.7) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (6.1) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т.е. там, где скорость меньше.

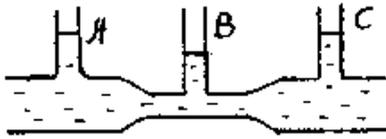


Рис. 41

Это можно продемонстрировать, установив вдоль трубы ряд **манометров** (рис. 41)

В соответствии с уравнением Бернулли опыт показывает, что в манометрической трубке В, прикрепленной к узкой части трубы, уровень

жидкости ниже, чем в манометрических трубках А и С, прикрепленных к широкой части трубы.

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости.

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда.

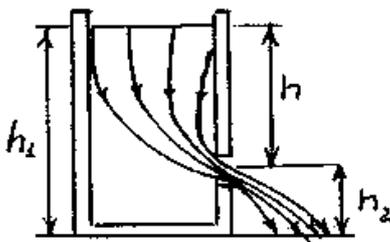


Рис.42

Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рис.42).

Рассмотрим два сечения (на уровне h_1 свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне h_2 выхода ее из отверстия). Напишем для них уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2$$

Так как давления p_1 и p_2 в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т.е. $p_1=p_2$, то уравнение будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

Из уравнения неразрывности (6.1) следует, что $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{S_1}{S_2}$, где S_1 и S_2 – площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если $S_1 \gg S_2$, то членом $\frac{\vartheta_1^2}{2}$ можно пренебречь и

$$\vartheta_2^2 = 2g h_1 - h_2 \approx 2gh$$

$$\vartheta_2 = \sqrt{2gh}.$$

Это выражение получило название **формулы Торричелли**.

6.4. Вязкость (внутреннее трение). ЛАМИНАРНЫЙ И ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

Вязкость (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

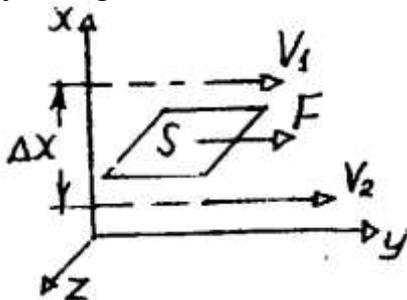


Рис. 43

Сила внутреннего трения F тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя s (рис. 43), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою.

На рисунке представлены два слоя, отстоящие друг от друга на расстоянии Δx и движущиеся со скоростями ϑ_1 и ϑ_2 . При этом $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \Delta \vartheta$.

Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, перпендикулярно скорости течения слоев. Величина $\frac{\Delta \vartheta}{\Delta x}$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x , перпендикулярном направлению движения слоев, и называется **градиентом скорости**.

Таким образом, модуль силы внутреннего трения

$$F = \eta \left| \frac{\Delta \vartheta}{\Delta x} \right| s,$$

(6.8)

где коэффициент пропорциональности η , зависящий от природы жидкости, называется **динамической вязкостью** (или просто **вязкостью**).

Единица вязкости – **Паскаль-секунда** (Па·с): 1 Па·с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении в градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения в 1 Н на 1 м² поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с / м²).

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. Особенно сильно от температуры зависит вязкость масел. Например, вязкость касторового масла в интервале 18-40°С падает в четыре раза.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется **ламинарным (слоистым)**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и **турбулентным (вихревым)**, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

Профиль усредненной скорости при турбулентном течении в трубах отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения.

Английский ученый О. Рейнольдс (1842-1912) в 1883 г. установил, что характер течения зависит от безразмерной величины, названной впоследствии **числом Рейнольдса**.

$$R_e = \rho \langle \vartheta \rangle \frac{d}{\eta} = \langle \vartheta \rangle \frac{d}{\vartheta}, \quad (6.9)$$

где ρ - плотность жидкости; $\langle \vartheta \rangle$ - средняя по сечению трубы скорость жидкости; $\vartheta = \frac{\eta}{\rho}$ - **кинематическая вязкость**; d - характерный линейный размер, например, диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($Re \leq 1000$) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области $1000 \leq Re \leq 2000$, а при $Re = 2300$ (для гладких труб) течение - турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

7.1. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

Если системы отсчета движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно и в одном из них справедливы законы динамики Ньютона, то эти системы являются инерциальными. Установлено также, что во всех инерциальных системах отсчета законы классической динамики имеют одинаковую форму; в этом суть **механического принципа относительности (принципа относительности Галилея)**.

Для его доказательств рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему K (с координатами x, y, z), которую условно будем считать неподвижной, и систему K' (с координатами x', y', z'), движущуюся относительно K равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v} ($\vec{v} = \text{const}$). Отсчет времени начнем с момента, когда начала координат обеих систем совпадают.

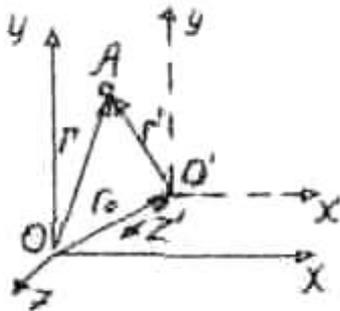


Рис.44

Найдем связь между координатами произвольной точки A в обеих системах. Из рис. 44 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{v}t. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) можно записать в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} x &= x' + v_x t, \\ y &= y' + v_y t, \\ z &= z' + v_z t \end{aligned} \quad (7.2)$$

Уравнения (7.1) и (7.2) носят название **преобразований координат Галилея**.

В частном случае, когда система K' движется со скоростью v вдоль положительного направления оси x системы K (в начальный момент времени оси координат совпадают), преобразования координат Галилея имеют вид

$$\begin{aligned}x &= x' + \vartheta t, \\y &= y', \\z &= z'.\end{aligned}$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета, т.е. к преобразованиям (7.2) можно добавить еще одно уравнение:

$$t = t'. \quad (7.3)$$

Записанные соотношения справедливы лишь в случае классической механики ($\vartheta \ll c$), а при скоростях, сравнимых со скоростью света, преобразования Галилея заменяются более общими преобразованиями Лоренца.

Продифференцировав выражение (7.1) по времени (с учетом (7.3)), получим уравнение

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \quad (7.4)$$

которое представляет собой **правило сложения скоростей в классической механике**.

Ускорение в системе отсчета К

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}' + \vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}.$$

Таким образом, ускорение точки А в системах отсчета К и К' движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, одинаково:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (7.5)$$

Таким образом, из соотношения (7.5) вытекает доказательство механического принципа относительности: уравнения динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не изменяются, т.е. являются **инвариантными** по отношению к преобразованиям координат. Галилей обратил внимание, что никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно. Например, сидя в каюте корабля, движущегося равномерно и прямолинейно, мы не можем определить, покоится корабль или движется, не взглянув в окно.

7.2. Постулаты специальной теории относительности

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает Движение макротел, движущихся с малыми скоростями ($\vartheta \ll c$). Однако в конце XIX в. выяснилось, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным, в частности при изучении движения быстрых заряженных частиц оказалось, что их движение не подчиняется законам механики. Далее возникли затруднения при попытках применить механику Ньютона к объяснению распространения света. Если источник и приемник света движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, то согласно классической механике, измеренная скорость должна зависеть от относительной скорости их движения. Американский физик А. Майкельсон (1852-1913 г-г.) в своем знаменитом опыте показал, что скорости света в двух движущихся друг относительно друга сис-

темах равны. Это противоречило правилу сложения скоростей классической механики.

Одновременно было показано противоречие между классической теорией и уравнениями Дж. К. Максвелла, лежащими в основе понимания света как электромагнитной волны.

Для объяснения этих и некоторых других опытных данных необходимо было создать новую механику, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ($v \ll c$). Это и удалось сделать А. Эйнштейну, одному из основателей современной физики. А. Эйнштейн пришел к выводу о том, что мирового эфира - особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы, - не существует. Существование постоянной скорости распространения света в вакууме находилось в согласии с уравнениями Максвелла.

Таким образом, А. Эйнштейн заложил основы **специальной теории относительности**. Эта теория представляет собой современную физическую теорию пространства и времени, в которой, как и в классической ньютоновской механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. Специальная теория относительности часто называется также **релятивистской теорией**, а специфические явления, описываемые этой теорией, **релятивистскими эффектами**.

В основе специальной теории относительности лежат **постулаты Эйнштейна**, сформулированные им в 1905 г.

1. Принцип относительности: никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

2. Принцип инвариантности скорости света: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Постулат Эйнштейна, являясь обобщением механического принципа относительности Галилея на любые физические процессы, утверждает, таким образом, что физические законы инвариантны к выбору инерциальной системы отсчета, а уравнения, описывающие эти законы, одинаковы по форме во всех инерциальных системах отсчета. Согласно этому постулату, все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны, т.е. явления (механические, электродинамические, оптические и др.) во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.

Согласно второму постулату Эйнштейна, постоянство скорости света - фундаментальное свойство природы, которое констатируется как опытный факт.

Специальная теория относительности потребовала отказа от привычных представлений о пространстве и времени, принятых в классической механике, поскольку они противоречили принципу постоянства скорости света. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

Постулаты Эйнштейна и теория, построенная на их основе, установила новый взгляд на мир и новые пространственно-временные представления, такие, например, как относительность длин и промежутков времени, относительность одновременности событий. Эти и другие следствия из теории Эйнштейна находят надежное экспериментальное подтверждение, являясь тем самым обоснованием постулатов Эйнштейна – обоснованием специальной теории относительности.

7.3. Преобразования Лоренца

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на основе сформулированных им постулатов, показал, что классические преобразования Галилея несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями, удовлетворяющими постулатам теории относительности.

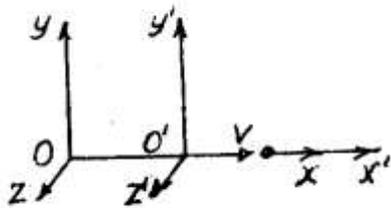


Рис. 45

Для иллюстрации этого вывода рассмотрим две инерциальные системы отсчета: К (с координатами x, y, z) и К' (с координатами x', y', z'), движущуюся относительно К (вдоль оси X) со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ (рис.45).

Пусть в начальный момент времени $t = t' = 0$, когда начала координат O и O' совпадают, излучается световой импульс. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и та же и равна c . Поэтому, если за время t в системе К сигнал дойдет до некоторой точки А (рис. 45), пройдя расстояние

$$x = ct, \quad (7.6)$$

то в системе К' координата светового импульса в момент достижения точки А

$$x' = ct', \quad (7.7)$$

где t' - время прохождения светового импульса от начала координат до точки А в системе К'. Вычитая (7.6) из (7.7), получим $x' - x = c(t' - t)$. Так как $x' \neq x$ (система К' перемещается по отношению к системе К), то $t' \neq t$, т.е. отсчет времени в системах К' и К различен – отсчет времени имеет относительный характер (в классической физике считается, что время во всех инерциальных системах отсчета течет одинаково, т.е. $t=t'$).

Эйнштейн показал, что в теории относительности классические преобразования, описывающие переход от одной инерциальной системы к другой:

$$K \rightarrow K'$$

$$K' \rightarrow K$$

$$\begin{array}{ll}
 x' = x - \vartheta t & x = x' + \vartheta t \\
 y' = y & y = y' \\
 z' = z & z = z' \\
 t' = t & t = t'
 \end{array}$$

заменяются преобразованиями Лоренца, удовлетворяющими постулатам Эйнштейна.

Эти преобразования предложены Лоренцом в 1904 г., еще до появления теории относительности, как преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны.

Преобразования Лоренца имеют вид

$$\begin{array}{ll}
 K \rightarrow K' & K' \rightarrow K \\
 x' = \frac{x - \vartheta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} & x = \frac{x' + \vartheta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 y' = y & y = y' \\
 z' = z & z = z' \\
 t = \frac{t - \vartheta x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & t = \frac{t' + \vartheta x' / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \end{array} \quad (7.8)$$

где $\beta = \vartheta / c$. Из сравнений приведенных уравнений вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при ϑ . Это очевидно, т.к. если скорость движения системы K относительно системы K' равна ϑ , то скорость движения K' относительно K равна $-\vartheta$.

Из преобразований Лоренца вытекает также, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью света), т.е. когда $\beta \ll 1$, они переходят в классические преобразования Галилея (в этом заключается суть **принципа соответствия**), которые являются следовательно, предельным случаем преобразований Лоренца. При $\vartheta \gg c$ выражения (7.8) для t , x , x' , t' теряют физический смысл. Это находится, в свою очередь, в соответствии с тем, что движение со скоростью, большей скорости света в вакууме, невозможно.

Из преобразования Лоренца следует очень важный вывод о том, что как расстояние, так и промежуток времени между событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в то время как в рамках преобразований Галилея эти величины считались абсолютными, не изменяющимися при переходе от одной системы к другой. Кроме того, как пространственные, так и временные преобразования (см. (7.8)) не являются независимыми, поскольку в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени пространственные координаты, т.е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Таким образом, теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а просматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство – время.

7.4. Следствия из преобразований Лоренца

1. Одновременность событий в разных системах отсчета.

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе K' им соответствуют координаты x_1 и x_2' и моменты времени t_1' и t_2' . Если события в системе K происходят в одной точке ($x_1=x_2$) и являются одновременными ($t_1 = t_2$), то, согласно преобразованиям Лоренца (7.8),

$$x_1' = x_2', \quad t_1' = t_2',$$

т.е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если события в системе K' пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременно ($t_1=t_2$), то в системе K согласно преобразованиям Лоренца (7.8),

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - \vartheta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & x_2' &= \frac{x_2 - \vartheta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t_1' &= \frac{1 - \frac{\vartheta x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & t_2' &= \frac{1 - \frac{\vartheta x_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x_1' &\neq x_2', & t_1' &\neq t_2' \end{aligned}$$

Таким образом, в системе K' эти события, оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными. Знак разности $t_2' - t_1'$ определяется знаком выражения $\vartheta(x_1 - x_2)$, поэтому в различных точках системы отсчета K' (при различных ϑ) разность $t_2' - t_1'$, будет различной по величине и может отличаться по знаку. Следовательно, в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому. Сказанное, однако, не относится к причинно-следственным событиям, т.к. можно показать, что порядок следования, так как причинно-следственных событий одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

2. Длительность событий в разных системах отсчета.

Пусть в некоторой точке (с координатой x), покоящейся относительно системы K , происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события) $\tau = t_2 - t_1$, где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе K'

$$\tau' = t_2' - t_1', \quad (7.9)$$

причем началу и концу события, согласно (7.8)

$$\begin{aligned} t_1' &= \frac{t_1 - \vartheta x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t_2' &= \frac{t_2 - \vartheta x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Подставляя (7.10) в (7.9), получим

$$\tau' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

или

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.11)$$

Из соотношения (7.10) вытекает, что $\tau < \tau'$, т.е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.

Этот результат может быть еще истолкован следующим образом: интервал времени τ' , отсчитанный по часам в системе K' , с точки зрения наблюдателя в системе K , продолжительнее интервала τ , отсчитанного по его часам. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета идут медленнее покоящихся часов. На основании относительности понятий "неподвижная" и "движущаяся" системы соотношения для τ и τ' обратимы. Из (7.11) следует, что замедление хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости света в вакууме.

Релятивистский эффект замедления хода часов является совершенно реальным и получил экспериментальное подтверждение при изучении нестабильных, самопроизвольно распадающихся элементарных частиц в опытах с π -мезонами. Среднее время жизни покоящихся π -мезонов (по часам, движущимся вместе с ними) $\tau \approx 2,2 \cdot 10^{-8}$ с. Следовательно, π -мезоны, образующиеся в верхних слоях атмосферы (на высоте ≈ 30 км) и движущиеся со скоростью, близкой к скорости света, должны были бы проходить расстояние $st = 6,6$ м, т.е. не могли бы достигать земной поверхности, что противоречит действительности.

3. Длина тел в разных системах отсчета.

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы K' . Длина стержня в системе K' будет $l'_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 - не изменяющиеся со временем t' координаты начала и конца стержня, а индекс 0 показывает, что в системе отсчета K' стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе K , относительно которой он движется со скоростью \mathcal{V} . Для этого необходимо измерить координаты его концов x_1 и x_2 в системе K в один и тот же момент времени t . Их разность $l = x_2 - x_1$ и даст длину стержня в системе K .

Используя преобразования Лоренца (7.8), получим

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - \mathcal{V}t}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - \mathcal{V}t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

т.е.

$$l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.12)$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится. Если стержень покоится в системе K , то, определяя ее длину в системе K , опять-таки приходим к выражению (7.12).

Из выражения (7.12) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз, т.е. так называемое **лоренцово сокращение длины** тем больше, чем больше скорость движения. Из второго и третьего уравнений преобразования Лоренца (7.8) следует, что $y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1$ и $z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1$, т.е. поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится.

4. Релятивистский закон сложения скоростей.

Рассмотрим движение материальной точки в системе K' , в свою очередь движущейся относительно системы K со скоростью \mathfrak{V} . Определим скорость этой же точки в системе K . Если в системе K движение точки в каждый момент времени t определяется координатами x, y, z , а в системе K' в момент времени t' - координатами x', y', z' , то

$$\mathfrak{V}_x = \frac{dx}{dt}, \quad \mathfrak{V}_y = \frac{dy}{dt}, \quad \mathfrak{V}_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\text{и } \mathfrak{V}'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad \mathfrak{V}'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad \mathfrak{V}'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

представляет собой соответственно проекции на оси x, y, z и x', y', z' вектора скорости рассматриваемой точки относительно систем K и K' .

Согласно преобразованиям Лоренца (7.8), произведя соответствующие преобразования, получаем **релятивистский закон сложения скоростей** специальной теории относительности:

$$\begin{array}{l} K' \rightarrow K \\ u_x = \frac{u'_x + \mathfrak{V}}{1 + \frac{\mathfrak{V}u'_x}{c^2}}, \\ u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\mathfrak{V}u'_x}{c^2}}, \\ u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\mathfrak{V}u'_x}{c^2}} \end{array} \qquad \begin{array}{l} K \rightarrow K' \\ u'_x = \frac{u_x - \mathfrak{V}}{1 - \frac{\mathfrak{V}u_x}{c^2}}, \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\mathfrak{V}u_x}{c^2}}, \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\mathfrak{V}u_x}{c^2}}. \end{array} \quad (7.13)$$

Если материальная точка движется параллельно относительно оси x , то скорость и относительно системы K совпадает с u_x , а скорость u' относительно K' - cu'_x . Тогда закон сложения скоростей примет вид

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c}}. \quad (7.14)$$

Легко убедиться в том, что, если скорости v , u' и u малы по сравнению со скоростью света c , то формулы (7.13) и (7.14) переходят в закон сложения скоростей в классической механике (7.4). Таким образом, законы релятивистской механики в предельном случае для малых скоростей (по сравнению со скоростью света) переходят в законы классической физики, которая, следовательно, является частным случаем механики Эйнштейна для малых скоростей.

Релятивистский закон сложения скоростей подчиняется второму постулату Эйнштейна. Действительно, если $u'=c$, то формула (7.14) примет вид

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c \quad (\text{аналогично можно показать, что при } u=c \text{ скорость } u' \text{ также равна } c)$$

с). Этот результат свидетельствует в том, что релятивистский закон сложения скоростей находится в согласии с постулатами Эйнштейна.

Докажем также, что если складываемые скорости сколь угодно близки к скорости света c , то их результирующая скорость будет всегда меньше или равна c . В качестве примера рассмотрим предельный случай $u'=v=c$. После подстановки в формулу (7.14) получим $u=c$. Таким образом, при сложении любых скоростей результат не может превысить скорости света в вакууме. Скорость света в вакууме есть предельная скорость, которую невозможно превысить.

7.5. Интервал между событиями

Преобразования Лоренца и следствия из них приводят к выводу об относительности длин и промежутков времени, значение которых в различных системах отсчета разное.

В то же время относительный характер длин и промежутков времени в теории Эйнштейна означает относительность отдельных компонентов какой-то реальной физической величины, не зависящей от системы отсчета, т.е. являющейся инвариантной по отношению к преобразованиям координат. В четырехмерном пространстве Эйнштейна, в котором каждое событие характеризуется четырьмя координатами (x, y, z, t) , такой физической величиной является **интервал** между двумя событиями:

$$S_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \quad (7.15)$$

где, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \ell_{12}$ - расстояние между точками обычного трехмерного пространства, в котором эти события произошли. Введя обозначение $t_{12} = t_2 - t_1$, получим

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2.$$

Покажем, что интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Обозначив

$$\Delta t = t_2 - t_1, \Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \Delta z = z_2 - z_1,$$

выражение (7.15) можно записать в виде

$$S_{12}^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Интервал между теми же событиями в системе К' равен

$$(S'_{12})^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - (\Delta y')^2 - \Delta z'^2. \quad (7.16)$$

Согласно преобразованиям Лоренца (7.8),

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \beta \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z,$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \beta \Delta x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Подставив эти значения в (7.16), после элементарных преобразований получим, что $(S'_{12})^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - (\Delta y)^2 - \Delta z^2$, т.е. $(S'_{12}) = S_{12}$.

Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод, что интервал, определяя пространственно-временные соотношения между событиями, является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Инвариантность интервала означает, что, несмотря на относительность длин и промежутков времени, течение событий носит объективный характер и не зависит от системы отсчета.

Теория относительности, таким образом, сформулировала новое представление о пространстве и времени, обобщенное далее в диалектическом материализме. Пространственно-временные отношения являются не абсолютными величинами, как утверждала механика Галилея-Ньютона, а относительными. Следовательно, представления об абсолютном пространстве и времени являются несостоятельными. Кроме того, инвариантность интервала между двумя событиями свидетельствует о том, что пространство и время органически связаны между собой и образуют единую форму существования материи — пространство — время.

Пространство и время не существуют вне материи и независимо от нее. Дальнейшее развитие относительности (**общая теория относительности**) показало, что свойства пространства-времени в данной области определяются действующими в ней полями тяготения.

7.6. Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Согласно представлениям классической механики, масса тела есть величина постоянная. Однако в конце XIX столетия на опытах с быстро движущимися электронами было установлено, что масса тела зависит от скорости его движения, а именно: возрастает с увеличением скорости по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.17)$$

где m - масса точки в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью v , m_0 - масса покоя материальной точки, т.е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой материальная точка находится в покое; c - скорость света в вакууме.

Из принципа относительности Эйнштейна, утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца. Основным законом динамики Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v}$$

оказывается также инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, если в нем справа стоит производная по времени от релятивистского импульса.

Основной закон релятивистской динамики и материальной точки имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right) \quad (7.18)$$

или

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \quad (7.20)$$

релятивистский импульс с материальной точки.

Отметим, что уравнение (7.19) внешне совпадает с основным уравнением ньютоновской механики (2.7). Однако физический смысл его другой: справа стоит производная по времени от релятивистского импульса, определяемого формулой (7.20). Таким образом, урав-

нение (7.18) инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца и, следовательно, удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой.

В силу однородности пространства в релятивистской механике выполняется **закон сохранения релятивистского импульса**: релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени. Часто вообще не оговаривают, что рассматривают релятивистский импульс, т. к. если тела движутся со скоростями, близкими к c , то можно использовать только релятивистское выражение для импульса.

Анализ формул (7.17), (7.18) и (7.20) показывает, что при скоростях, значительно меньших скорости света, уравнение (7.18) переходит в основной закон классической механики. Следовательно, условием применимости законов классической (ньютоновской) механики является условие $\vartheta \ll c$. Законы классической механики получаются как следствие теории относительности для предельного случая $\vartheta \ll c$. Таким образом, классическая механика - это механика макротел, движущихся с малыми скоростями.

Экспериментальное доказательство зависимости массы от скорости (7.17) является подтверждением справедливости специальной теории относительности.

7.7. Законы взаимосвязи массы и энергии

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы (материальной точки). Известно, что приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$dT = dA \text{ или } dT = \vec{F} d\vec{r}. \quad (7.21)$$

Учитывая, что $d\vec{r} = \vec{v} dt$, и, подставив в (7.21) выражение (7.18), получим

$$dT = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \right) \vec{v} dt.$$

Преобразовав данное выражение с учетом того, что $\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vartheta \cdot d\vartheta$, и формулы (7.17), придем к выражению

$$dT = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \right) = c^2 dm, \quad (7.22)$$

т.е. приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению ее массы.

Так как кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна массе покоя m_0 , то, проинтегрировав (7.22) получим

$$T = m - m_0 \frac{c^2}{c^2}, \quad (7.23)$$

или кинетическая энергия релятивистской частицы имеет вид

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (7.24)$$

Выражение при скоростях $v \ll c$ переходит в классическое: $T = \frac{m_0 v^2}{2}$. Раз-

лагая в ряд $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + 0,5 \frac{v^2}{c^2} + 3 \frac{v^4}{8c^4} + \dots$ при $v \ll c$, правомерно пренебречь членами второго порядка малости.

А. Эйнштейн обобщил положение (7.22), предположив, что оно справедливо не только для кинетической энергии материальной точки, но и для полной энергии, а именно: любое изменение массы m сопровождается изменением полной энергии материальной точки,

$$\Delta E = c^2 \Delta m. \quad (7.25)$$

Отсюда Эйнштейн пришел к универсальной зависимости между полной энергией тела E и его массой m :

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.26)$$

Уравнение (7.25), равно как и (7.26), выражает фундаментальный закон природы – **закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии**: полная энергия системы равна произведению ее массы на квадрат скорости света в вакууме. В полную энергию E не входит потенциальная энергия тела во внешнем поле.

Закон (7.26) можно, учитывая выражение (7.23), записать в виде

$$E = m_0 c^2 + T,$$

откуда следует, что покоящееся тело ($T=0$) также обладает энергией

$$E_0 = m_0 c^2,$$

называемой **энергией покоя**. Классическая механика энергию покоя E_0 не учитывает, считая, что при $v = 0$ энергия покоящегося тела равна нулю.

В силу однородности времени в релятивистской механике, как и в классической, выполняется **закон сохранения энергии**: полная

энергия замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Из формул (7.26) и (7.20) найдем релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы:

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \\ E &= \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Возвращаясь к уравнению (7.26), отметим еще раз, что оно имеет универсальный характер. Оно применимо ко всем формам энергии, т.е. можно утверждать, что с энергией, какой бы формы она ни была, связана масса

$$m = \frac{E}{c^2} \quad (7.28)$$

и, наоборот, со всякой массой связана определенная энергия (7.26).

Чтобы охарактеризовать прочность связи и устойчивость системы каких-либо частиц (например, атомного ядра как системы из протонов и нейтронов), рассматривают энергию связи. **Энергия связи системы** равна работе, которую необходимо затратить, чтобы разложить эту систему на составные части (например, атомное ядро - на протоны и нейтроны),

Энергия связи системы

$$E_{CB} = \sum_{i=1}^n m_{0i} c^2 - M_0 c^2, \quad (7.29)$$

где m_{0i} , - масса покоя i -и частицы в свободном состоянии; M_0 – масса покоя системы, состоящей из n частиц.

Закон взаимосвязи массы и энергии блестяще подтвержден экспериментом о выделении энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергетических эффектов при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.

Рассматривая выводы специальной теории относительности, видим, что она, как, впрочем, и любые крупные открытия, потребовала пересмотра многих установившихся и ставших привычными представлений. Масса тела не остается постоянной величиной, а зависит от скорости тела; длина тел и длительность событий не являются абсолютными величинами, а носят относительный характер; наконец, масса и энергия оказались связанными друг с другом, хотя они и являются качественно различными свойствами материи.

Эту ломку укоренившихся представлений некоторые буржуазные философы пытались использовать для распространения двух разновидностей идеализма: энергетизма и философского релятивизма.

Первая из этих теорий рассматривала возможность преобразования массы в энергию и, наоборот, энергии в массу, доказывая "эквивалентность материи и «энергии»". Закон взаимосвязи массы и энергии, действительно, утверждает, что любые превращения энергии тела сопровождаются изменениями его массы, однако при этом масса не "переходит в энергию". Закон взаимосвязи массы и энергии является подтверждением неразрывности материи и движения - одного из основных положений диалектического материализма.

Основной вывод теории относительности сводится к тому, что пространство и время органически связаны и образуют единую форму существования материи – пространство – время. Только поэтому пространственно-временной интервал между двумя событиями является абсолютным, в то время как пространственные и временные промежутки между этими событиями относительны. Следовательно, вытекающие из преобразований Лоренца следствия являются выражением объективно существующих пространственно-временных соотношений движущейся материи.

II. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Молекулярная физика и термодинамика - разделы физики, в которых изучаются **макроскопические процессы** в телах, связанные с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул. Для исследования этих процессов применяют два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода: **статистический (молекулярно–кинетический) и термодинамический**. Первый лежит в основе молекулярной физики, второй - термодинамики.

Молекулярная физика – раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно – кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

Идея об атомном строении вещества высказана древнегреческим философом Демокритом (460-370 гг. до н.э.). Атомистика возрождается вновь лишь в XVII в. и развивается в работах М.В.Ломоносова, взгляды которого на строение вещества и тепловые явления были близки к современным. Строгое развитие молекулярной теории относится к середине XIX в. и связано с работами немецкого физика Р.Клаузиуса, английского физика Дж.Максвелла и австрийского физика Л.Больцмана.

Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Законы поведения огромного числа молекул, являясь статистическими закономерностями, изучаются с помощью **статистического метода**. Этот метод основан на том, что свойства макроскопической системы в конечном счете являются свойствами частиц системы, особенностями их движения и усредненными значениями динамических характеристик этих частиц (скорости, энергии и т.д.). Например, температура тела оп-

ределяется скоростью беспорядочного движения его молекул, но т.к. в любой момент времени разные молекулы имеют различные скорости, то она может быть выражена только через среднее значение скорости движения молекул. Нельзя говорить о температуре одной молекулы. Таким образом, макроскопические характеристики тел имеют физический смысл лишь в случае большого числа молекул.

Термодинамика – раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями. Термодинамика не рассматривает микропроцессы, которые лежат в основе этих превращений. Этим **термодинамический метод** отличается от статистического. Термодинамика базируется на двух началах – фундаментальных законах, установленных в результате обобщения опытных данных.

Область применения термодинамики значительно шире, чем молекулярно-кинетической теории, ибо нет таких областей физики и химии, в которых нельзя было бы пользоваться термодинамическим методом. С другой стороны, термодинамический метод несколько ограничен: термодинамика ничего не говорит о микроскопическом строении вещества, о механизме явлений, а лишь устанавливает связи между макроскопическими свойствами вещества. Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое, но отличаясь различными методами исследования.

Термодинамика имеет дело с **термодинамической системой** – совокупностью макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами (внешней средой). Основа термодинамического метода – определение состояния термодинамической системы. Состояние системы задается термодинамическими параметрами (параметрами состояния) – совокупностью физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Обычно в качестве параметров состояния выбирают температуру, давление и объем.

Параметры состояния системы могут изменяться. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров называется **термодинамическим процессом**. Макроскопическая система находится в **термодинамическом равновесии**, если ее состояние с течением времени не меняется (предполагается, что внешние условия рассматриваемой системы при этом не изменяются).

1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

1.1. Опытные законы идеального газа

В молекулярно-кинетической теории пользуются идеализированной моделью **идеального газа**, согласно которой:

собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;

между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;

столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Модель идеального газа можно использовать при изучении реальных газов, т.к. они в условиях, близких к нормальным (например, кислород и гелий), а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу. Кроме того, внося поправки, учитывающие собственный объем молекул газа и действующие молекулярные силы, можно перейти к теории реальных газов.

Опытным путем, еще до появления молекулярно-кинетической теории, был установлен целый ряд законов, описывающих поведение идеальных газов, которые мы и рассмотрим.

Закон Бойля-Мариотта: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная: $pV = \text{const}$

$$\text{при } T = \text{const}, m = \text{const}. \quad (1.1)$$

Кривая, изображающая зависимость между величинами p и V , характеризующими свойства вещества при постоянной температуре, называется **изотермой** (рис 46).

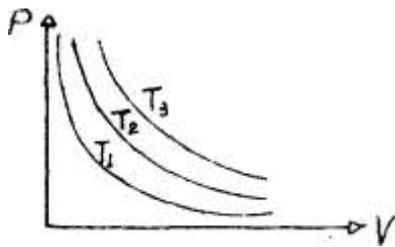


Рис. 46

Изотермы представляют собой гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс.

Закон Гей-Люссака: 1) объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad \text{при } p = \text{const}, m = \text{const}, \quad (1.2)$$

2) давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой:

$$p = p_0(1 + \alpha t) \quad \text{при } V = \text{const}, m = \text{const}. \quad (1.3)$$

В этих уравнениях t - температура по шкале Цельсия, p_0 и V_0 – давление и объем при 0°C , коэффициент $\alpha = \frac{1}{273,15} \text{K}^{-1}$.

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется **изобарным**. На диаграмме в координатах V, t (рис. 47) этот процесс изображается прямой, называемой **изобарой**. Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется **изохорным**. На диаграмме в координатах p, t (рис.48) он изображается прямой, называемой **изохорой**.

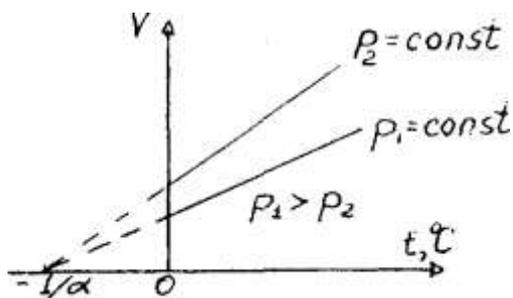


Рис. 47

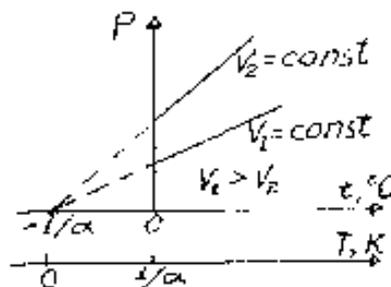


Рис. 48

Из (1.2) и (1.3) следует, что изобары и изохоры пересекают ось температур в точке $t = -\frac{1}{\alpha} = -273.15^\circ\text{C}$, определяемой из условия $1 + \alpha t = 0$. Если сместить начало отсчета в эту точку, то происходит переход к шкале Кельвина (рис. 48), откуда

$$T = t + \frac{1}{\alpha}.$$

Вводя в формулы (1.2) и (1.3) термодинамическую температуру, законам Гей-Люссака можно придать более удобный вид:

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \equiv V_0 \left[1 + \alpha \left(T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = V_0 \alpha T,$$

$$p = p_0 (1 + \alpha t) \equiv p_0 \left[1 + \alpha \left(T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = p_0 \alpha T.$$

или

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1.4)$$

при $p = \text{const}$, $m = \text{const}$,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

при $V = \text{const}$, $m = \text{const}$.

где индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям, лежащим на одной изобаре или изохоре.

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковой температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен $22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

По определению в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, называемое **постоянной Авогадро:**

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов, т.е.

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

где p_1, p_2, \dots, p_n – парциальные давления – давления, которые оказывали бы газы смеси, если бы они одни занимали объем, равный объему смеси при той же температуре.

1.2. Уравнение Клапейрона-Менделеева

Как уже указывалось, состояние некоторой массы определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением p , объемом V и температурой T . Между этими параметрами существует определенная связь, называемая **уравнением состояния**.

Французский физик Б.Клапейрон вывел уравнение состояния идеального газа, объединив законы Бойля-Мариотта и Гей-Люссака.

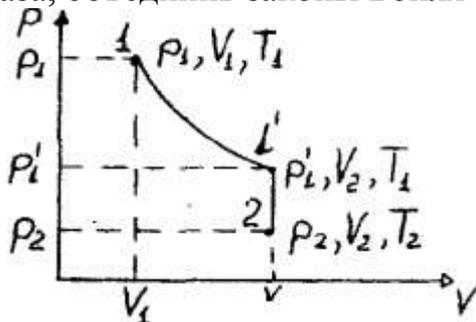


Рис. 49

Пусть некоторая масса газа занимает объемом V_1 , имеет давление p_1 и находится при температуре T_1 . Эта же масса газа в другом произвольном состоянии характеризуется параметрами p_2, V_2, T_2 (рис. 49).

Переход из состояния 1 в состояние 2 осуществляется в виде двух процессов:

- 1) изотермического (изотерма 1-1'),
- 2) изохорного (изохора 1'-2).

В соответствии с законами Бойля-Мариотта (1.1) и Гей-Люссака (1.4) запишем:

$$p_1 V_1 = p_1' V_2, \quad (1.5)$$

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (1.6)$$

Исключив из уравнений (1.5) и (1.6) p_1' , получим

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Так как состояния 1 и 2 были выбраны произвольно, то для данной массы газа величина $\frac{pV}{T}$ остается постоянной, т.е.

$$\frac{pV}{T} = B = \text{const}. \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) является уравнением Клапейрона, в котором B – газовая постоянная, различная для разных газов.

Русский ученый Д.И.Менделеев объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся уравнение (1.7) к одному моллю, используя молярный объем V_m . Согласно закону Авогадро, при одинаковых p и T моли всех газов занимают одинаковый молярный объем V_m , поэтому постоянная B будет одинакова для всех газов. Эта общая для всех газов постоянная обозначается R и называется **молярной газовой постоянной**. Уравнению

$$pV_m = RT \quad (1.8)$$

удовлетворяет лишь идеальный газ, и оно является **уравнением состояния идеального газа**, называемым также **уравнением Менделеева-Клапейрона**.

Числовое значение молярной газовой постоянной определим из формулы (1.8), полагая, что моль газа находится при нормальных условиях ($p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273,15$ К, $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}$ м³/моль): $R = 8,31$ Дж/(моль К).

От уравнения (1.8) для моля газа можно перейти к уравнению Клапейрона-Менделеева для произвольной массы газа. Если при некотором заданном давлении и температуре один моль газа занимает объем V_m , то при тех же условиях

масса m газа займет объем $V = \frac{m}{M} V_m$, где M - **молярная масса** (масса одного моля вещества). Единица молярной массы - килограмм на моль (кг/моль). Уравнение Клапейрона-Менделеева для массы m газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \quad (1.9)$$

где $\nu = \frac{m}{M}$ - количество вещества.

Часто пользуются несколько иной формой уравнения состояния идеального газа, вводя **постоянную Больцмана**:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Исходя из этого, уравнение состояния (1.8) запишем в виде

$$p = R \frac{T}{V_m} = k \frac{N_A T}{V_m} = nkT,$$

где $\frac{N_A}{V_m} = n$ - концентрация молекул (число молекул в единице объема). Таким образом, из уравнения

$$p = nkT \quad (1.10)$$

следует, что давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул (или плотности газа). При одинаковых температуре и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. Число молекул, содержащихся в 1 м³ газа при нормальных условиях, называется **числом Лошмидта**:

$$N_{л} = \frac{p_0}{kT_0} = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^3.$$

1.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории рассмотрим одноатомный идеальный газ. Предположим, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между ними пренебрежимо

мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие. Выделим на стенке сосуда некоторую элементарную площадку ΔS (рис.50) и вычислим давление, оказываемое на эту площадку.

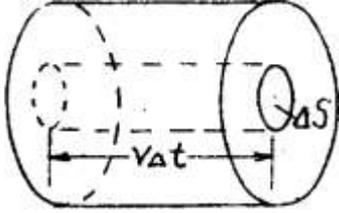


Рис. 50

При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передает ей импульс $m_0 \vartheta - (-m_0 \vartheta) = 2m_0 \vartheta$, где m_0 – масса молекулы, ϑ – ее скорость.

За время Δt площадки ΔS достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме цилиндра с основанием ΔS и высотой $\vartheta \Delta t$ (рис. 50).

Число этих молекул равно $n\Delta S \vartheta \Delta t$ (n -концентрация молекул). Необходимо, однако, учитывать, что реально молекулы движутся к площадке ΔS под разными углами и имеют различные скорости, причем скорость молекул при каждом соударении меняется. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется $1/3$ молекул, причем половина ($1/6$) движется вдоль данного направления в одну сторону, половина – в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку ΔS будет $1/6 n\Delta S \vartheta \Delta t$. При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta p = 2m_0 \vartheta \frac{1}{6} n\Delta S \vartheta \Delta t = \frac{1}{3} nm_0 \vartheta^2 \Delta S \Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда

$$p = \frac{\Delta p}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3} nm_0 \vartheta^2. \quad (1.11)$$

Если газ в объеме V содержит N молекул, движущихся со скоростями $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$, то целесообразно рассматривать **среднюю квадратичную скорость**

$$\langle \vartheta_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N \sum_{i=1}^N \vartheta_i^2}}, \quad (1.12)$$

характеризующую всю совокупность молекул газа.

Уравнение (1.11) с учетом (1.12) примет

$$p = \frac{1}{3} nm_0 \langle \vartheta_{\text{кв}} \rangle^2. \quad (1.13)$$

Выражение (1.13) называется **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов**. Точный расчет с учетом движения молекул по всевозможным направлениям дает ту же формулу.

Учитывая, что $n = \frac{N}{V}$, получим

$$pV = \frac{1}{3} Nm_0 \langle \mathfrak{g}_{\text{KB}} \rangle^2 \quad (1.14)$$

или

$$pV = \frac{2}{3} Nm_0 \frac{\langle \mathfrak{g}_{\text{KB}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E, \quad (1.15)$$

где E - суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Так как масса газа $m=Nm_0$, то уравнение (1.14) можно переписать в виде

$$pV = \frac{1}{3} m \langle \mathfrak{g}_{\text{KB}} \rangle^2.$$

Для одного моля газа $m=M$ (M - молярная масса), поэтому

$$pV = \frac{1}{3} M \langle \mathfrak{g}_{\text{KB}} \rangle^2,$$

где V_m - молярный объем. С другой стороны, по уравнению Клапейрона-Менделеева, $pV_m = RT$. Таким образом,

$$RT = \frac{1}{3} M \langle \mathfrak{g}_{\text{KB}} \rangle^2,$$

откуда

$$\langle \mathfrak{g}_{\text{KB}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (1.16)$$

Так как $M=m_0N_A$, где m_0 - масса одной молекулы, N_A - постоянная Авогадро, то из уравнения (1.16) следует, что

$$\langle \mathfrak{g}_{\text{KB}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (1.17)$$

где $k = \frac{R}{N_A}$ - постоянная Больцмана. Отсюда найдем, что при комнатной тем-

пературе молекулы кислорода имеют среднюю квадратичную скорость 480 м/с, водорода - 1900 м/с. При температуре жидкого гелия те же скорости будут соответственно 40 и 160 м/с.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \langle \mathfrak{g}_{\text{KB}} \rangle^2}{2} = \frac{3kT}{2} \quad (1.18)$$

пропорциональна термодинамической температуре и зависит только от нее. Из этого уравнения следует, что при $T=0$ $\langle \varepsilon_0 \rangle = 0$, т.е. при 0° K прекращается поступательное движение молекул газа, а следовательно, его давление равно нулю. Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеальными газами формула (1.18) раскрывает молекулярно-кинетическое толкование температуры.

1.4. Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории молекулам задавали различные скорости. В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения молекул являются равновероятными, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.

По молекулярно-кинетической теории, как бы не изменялась скорость молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул массой m_0 в газе, находящемся в состоянии равновесия при $T = \text{const}$, остается постоянной и

равной $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$. Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоя-

нии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем, распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом.

При выводе закона распределения молекул по скоростям Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа N тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного движения при одинаковой температуре. Предполагалось также, что силовые поля на газ не действуют.

Закон Максвелла описывается некоторой функцией $f(v)$, называемой **функцией распределения молекул по скоростям**. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные dv , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул $dN(v)$, имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция $f(v)$ определяет относительное число молекул $\frac{dN(v)}{N}$, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, т.е.

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v) dv,$$

откуда

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N dv}.$$

Применяя методы теории вероятности, Максвелл нашел функцию $f(v)$ - закон для распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (1.19)$$

Из (1.19) видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния (от температуры T).

График функции (1.19) приведен на рис. 51.

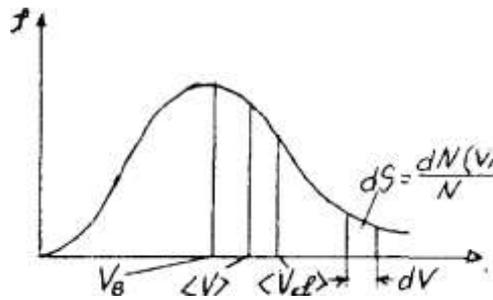


Рис. 51

Он подтвержден экспериментально опытом Штерна. Т.к. при возрастании v множитель $e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$ уменьшается быстрее, чем растет множитель v^2 , то функция $f(v)$, начинаясь от нуля, достигает максимума при v_B и затем асимптотически стремится к нулю. Кривая несимметрична относительно v_B .

Относительное число молекул $\frac{dN}{N}$, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, находится как площадь более светлой полоски на рис.51. Площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Это означает, что функция $f(v)$ удовлетворяет условию нормировки $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$.

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется **наиболее вероятной скоростью**. Значение наиболее вероятной скорости можно найти продифференцировав выражение (1.19) по аргументу v , приравняв результат нулю и используя условия для максимума выражения $f(v)$:

$$\frac{d\left(v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\right)}{dv} = 2v \left(\frac{1 - m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = 0.$$

Значения $v=0$ и $v=\infty$ соответствуют минимумам выражения (1.19), а значение v , при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая наиболее вероятная скорость v_B :

$$v_B = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (1.20)$$

Из формулы (1.20) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям (рис. 52) сместится вправо.

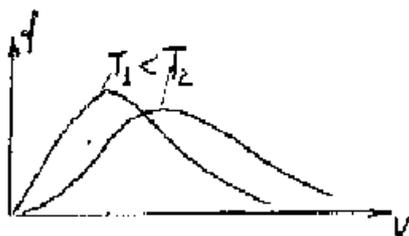


Рис. 52

Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

Средняя скорость молекулы $\langle v \rangle$

(средняя арифметическая скорость) определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N \int_0^{\infty} v dN} = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

Подставляя сюда $f(v)$ и интегрируя, получим

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (1.21)$$

Скорости, характеризующие состояние газа: наиболее вероятная скорость

$$v_B = \sqrt{\frac{2RT}{M}};$$

$$\text{средняя } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m_0}} = 1,13 v_B;$$

$$\text{средняя квадратичная } \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1,22 v_B \text{ (рис.51).}$$

1.5. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между этими последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь l , который называется **длиной свободного пробега**. В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но т. к. мы имеем дело с огромным числом молекул и они находятся в беспорядочном движении, то можно говорить о **средней длине свободного пробега молекул** $\langle l \rangle$.

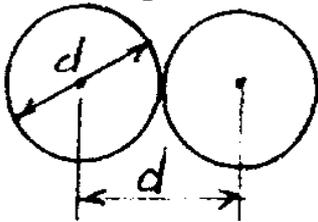


Рис. 53

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы** d (рис.53). Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т.е. от температуры газа.

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $\langle v \rangle$, и если $\langle z \rangle$ - среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}.$$

Для определения $\langle z \rangle$ представим себе молекулу в виде шарика диаметром d , которая движется среди других "застывших" молекул.

Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших d , т.е. лежат внутри "ломаного" цилиндра радиусом d (рис. 54).

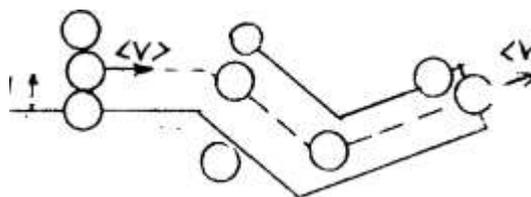


Рис. 54

Среднее число столкновений за 1 с равно числу молекул в объеме "ломаного" цилиндра:

$$\langle z \rangle = nV,$$

где n - концентрация молекул, $V = \pi d^2 \langle \vartheta \rangle$ ($\langle \vartheta \rangle$ - средняя скорость молекулы или путь, пройденный ею за 1 с). Таким образом, **среднее число столкновений**

$$\langle z \rangle = n\pi d^2 \langle \vartheta \rangle.$$

Расчеты показывают, что при учете движения других молекул

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle \vartheta \rangle.$$

Тогда средняя длина свободного пробега

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n},$$

т.е. $\langle \ell \rangle$ обратно пропорциональна концентрации молекул.

1.6. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

В термодинамически неравновесных системах возникают особые необратимые процессы, называемые **явлениями переноса**, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса. К явлениям переноса относятся **теплопроводность** (обусловлена переносом энергии), **диффузия** (обусловлена переносом массы) и **внутреннее трение** (обусловлено переносом импульса). Для простоты ограничимся одномерными явлениями переноса. Систему отсчета будем выбирать так, чтобы ось x была ориентирована в направлении переноса.

1. Теплопроводность. Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т.е., иными словами, выравнивание температур.

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется **закону Фурье**:

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (1.22)$$

где j_E - **плотность теплового потока** – величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x , λ - **теплопроводность**, $\frac{dT}{dx}$ - градиент температуры,

равный скорости изменения температуры на единицу длины x в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что при теплопроводности

энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому знаки j_E и $\frac{dT}{dx}$ противоположны). Теплопроводность λ численно равна плотности теплового потока при градиенте температуры равном единице.

Можно показать, что

$$\lambda = \frac{1}{3} c_v \rho \langle \mathfrak{v} \rangle \langle \ell \rangle, \quad (1.23)$$

где c_v - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, ρ - плотность газа, $\langle \mathfrak{v} \rangle$ - средняя скорость теплового движения молекул, $\langle \ell \rangle$ - средняя длина свободного пробега.

2. Диффузия. Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности. Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникли противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах распространяется очень медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега и сталкиваясь с другими молекулами, в основном "стоят" на месте.

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется **закону Фика**:

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}, \quad (1.24)$$

где j_m - **плотность потока массы** - величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x ; D - **диффузия** (коэффициент диффузии); $\frac{d\rho}{dx}$ - градиент плотности на единицу длины x в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому знаки j_m и $\frac{d\rho}{dx}$ противоположны).

Диффузия D численно равна плотности потока массы при градиенте плотности равном единице. Согласно кинетической теории газов,

$$D = \frac{1}{3} \langle \mathfrak{v} \rangle \langle \ell \rangle. \quad (1.23)$$

3. Внутреннее трение (вязкость). Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее - увеличи-

вается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Согласно формуле (6.8), сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется **закону Ньютона**:

$$F = \eta \left| \frac{d\vartheta}{dx} \right| S, \quad (1.26)$$

где η - динамическая вязкость (вязкость), $\frac{d\vartheta}{dx}$ - градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении x , перпендикулярном направлению движения слоев, S - площадь, на которую действует сила F .

Взаимодействие двух слоев согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение (1.26) можно представить в виде

$$j_p = -\eta \frac{d\vartheta}{dx}, \quad (1.27)$$

где j_p - **плотность потока импульса** – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси x через единичную площадку, перпендикулярную оси x ; $\frac{d\vartheta}{dx}$ - градиент скорости. Знак минус указывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости (поэтому знаки j_p и $\frac{d\vartheta}{dx}$ противоположны).

Динамическая вязкость η численно равна плотности потока импульса при градиенте скорости равном единице; она вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle \vartheta \rangle \langle 1 \rangle. \quad (1.28)$$

Из сопоставления формул (2.23), (2.24) и (2.27), описывающих явления переноса, следует, что закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Эти законы были установлены задолго до того, как они были обоснованы и выведены из молекулярно-кинетической теории, позволившей установить, что внешнее сходство их математических выражений обусловлено общностью лежащего в основе явлений теплопроводности, диффузии и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Рассмотренные законы Фурье, Фика и Ньютона не вскрывают молекулярно-кинетического смысла коэффициентов λ , D и η . Выражения для коэффициентов переноса выводятся из кинетической теории. Они записаны без выводов, т.к. строгое рассмотрение явлений переноса довольно громоздко, а качественное не имеет смысла. Формулы (1.23), (1.25) и (1.28) связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих

формулы вытекают простые зависимости между λ , D и η : $\eta = \rho D$, $\frac{\lambda}{\eta c_v} = 1$. Используя эти формулы, можно по найденным из опыта одним величинам определить другие.

2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул

Важной характеристикой термодинамической системы является ее **внутренняя энергия** U - энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т.д.) и энергия взаимодействия этих частиц. Из этого определения следует, что к внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешних полях.

Внутренняя энергия - однозначная функция термодинамического состояния системы, т.е. в каждом состоянии система обладает вполне определенной внутренней энергией. Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренней энергии этих состояний и не зависит от пути перехода. Ранее было введено понятие степеней свободы - числа независимых переменных (координат), полностью определяющих положение системы в пространстве. В ряде задач молекулу одноатомного газа (рис. 55 а) рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения. При этом энергию вращательного движения можно не учитывать ($r \rightarrow 0$, $J = mr^2 \rightarrow 0$, $T_{вр} = \frac{J\omega^2}{2} \rightarrow 0$).

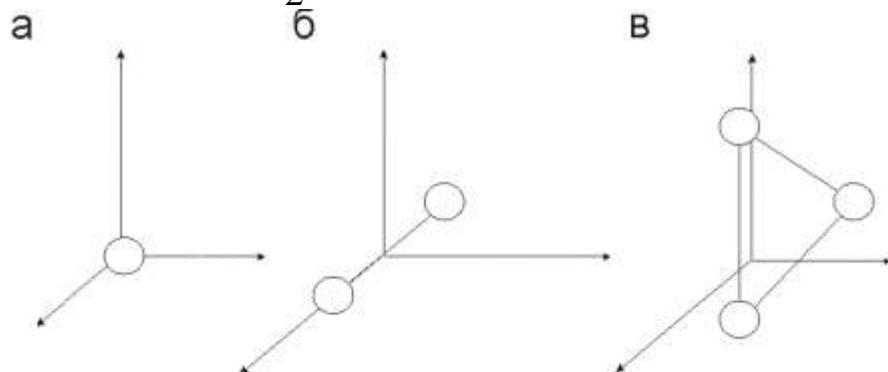


Рис. 55

В классической механике молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью (рис. 55 б). Эта система кроме трех степе-

ней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси (оси, проходящей через оба атома) лишено смысла, так как момент инерции относительно этой оси ≈ 0 . Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы ($i = 5$). Трехатомная (рис. 55 в) и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных. Естественно, что жесткой связи между атомами не существует. Поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

Независимо от общего числа степеней свободы молекул, три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимуществ перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная $1/3$ значения $\langle \epsilon_0 \rangle$ в (2.18):

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \frac{\langle \epsilon_0 \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT.$$

В классической статистической физике выводится **закон Больцмана** о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы - в среднем энергия, равная kT . Колебательная степень обладает вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия, но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Таким образом, средняя энергия молекулы

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i - сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}.$$

В классической теории рассматривают молекулы с жесткой связью между атомами; для них i совпадает с числом степеней свободы молекулы.

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю, то внутренняя энергия, отнесенная к одному молю газа, равна сумме кинетических энергий N_A молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} k N_A T = \frac{i}{2} RT. \quad (2.1)$$

Внутренняя энергия для произвольной массы m газа $U_m = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{1}{2} RT$, где k - постоянная Больцмана, ν - количество вещества.

2.2. Первое начало термодинамики

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Внутренняя энер-

гия системы может изменяться в результате различных процессов, например, совершения над системой работы и сообщения ей теплоты. Так, вдвигая поршень в цилиндр, в котором находится газ, мы сжимаем этот газ, в результате чего его температура повышается, т.е. тем самым изменяется (увеличивается) внутренняя энергия газа. С другой стороны, температуру газа и его внутреннюю энергию можно повысить за счет сообщения ему некоторого количества теплоты - энергии, переданной системе внешними телами путем теплообмена.

Таким образом, можно говорить о двух формах передачи энергии от одних тел к другим: работе и теплоте. Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения и наоборот. При этих превращениях соблюдается закон сохранения и превращения энергии; применительно к термодинамическим процессам этим законом и является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных.

Допустим, что некоторая система (газ, заключенный в цилиндр под поршнем), обладая внутренней энергией U_1 , получила некоторое количество теплоты Q и, перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией U_2 , совершила работу A над внешней средой, т.е. против внешних сил. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе, а работа - положительной, когда система совершает ее против внешних сил. Опыт показывает, что в соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ будет одинаковым и равным разности между количеством теплоты Q , полученным системой, и работой A , совершенной системой против внешних сил:

$$\Delta U = Q - A$$

или

$$Q = \Delta U + A. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) выражает **первое начало термодинамики**: теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил.

Выражение (2.2) в дифференциальной форме будет иметь вид

$$dQ = dU + dA$$

или в более корректной форме

$$\delta Q = \delta U + \delta A, \quad (2.3)$$

где δQ - бесконечно малое количество теплоты; dU - бесконечно малое изменение внутренней энергии системы; dA - элементарная работа. В выражении dU является полным дифференциалом, а δA и δQ таковыми не являются. В дальнейшем будем использовать запись первого начала термодинамики в форме (2.3).

Из формулы (2.3) следует, что в системе СИ количество теплоты выражается в тех же единицах, что работа и энергия, т.е. в джоулях (Дж).

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии $\Delta U = 0$. Тогда, согласно первому началу тер-

модинамики, $A=Q$, т.е. **вечный двигатель первого рода** - периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия, - невозможен (одна из формулировок первого начала термодинамики).

2.3. Работа газа при изменении его объема

Для рассмотрения конкретных процессов найдем в общем виде внешнюю работу, совершаемую газом при изменении его объема. Рассмотрим, например, газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (рис. 56).

Если газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние $d\ell$, то производит над ним работу $\delta A = F d\ell = p S d\ell = p dV$, где S - площадь поршня, $S d\ell = dV$ - изменение объема системы. Таким образом,

$$\delta A = p dV.$$

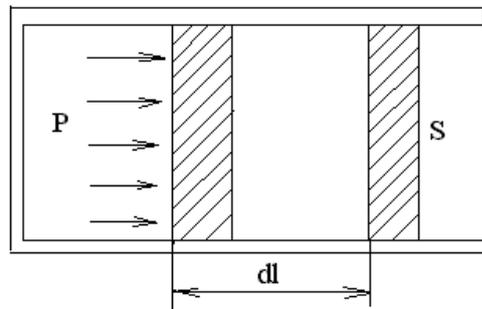


Рис. 56

Полную работу A , совершаемую газом при изменении его объема от V_1 до V_2 , найдем интегрированием формулы (2.4):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (2.5)$$

Результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом газа. Найденное для работы выражение (2.5) справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

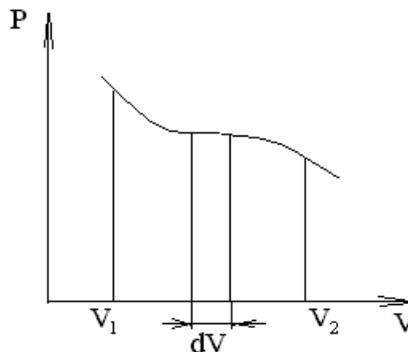


Рис. 57

Произведенную при том или ином процессе работу можно изобразить графически с помощью кривой в координатах p, V . Например, изменение давления газа при его расширении изобразится кривой на рис. 57.

При увеличении объема на dV совершаемая газом работа равна $p dV$, т.е. определяется площадью полоски с основанием dV на рисунке. Поэтому полная работа, совершаемая газом при расширении от объема V_1 до объема V_2 определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой $p=f(V)$ и прямыми V_1 и V_2 .

Графически можно изображать только **равновесные процессы**, процессы состоящие из последовательности равновесных состояний. Они протекают так, что изменение термодинамических параметров за короткий промежуток времени бесконечно мало. Все реальные процессы неравновесны (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее процесс протекает, тем он ближе к равновесному). В дальнейшем рассматриваемые процессы будем считать равновесными.

2.4. Теплоемкость

Удельная теплоемкость вещества - величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$C = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Единица удельной теплоемкости - джоуль на килограмм-кельвин $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right)$.

Молярная теплоемкость - величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного моля вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad (2.6)$$

где $\nu = \frac{m}{M}$ - количество вещества, выражающее число молей.

Единица молярной теплоемкости - джоуль на моль – кельвин $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right)$.

Удельная теплоемкость c связана с молярной C_m соотношением

$$C_m = cM, \quad (2.7)$$

где M - молярная масса вещества.

Различают теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается постоянным.

Запишем выражение первого начала термодинамики (2.3) для 1 моля газа с учетом формул (2.4) и (2.6):

$$C_m dT = dU_m + p dV_m. \quad (2.8)$$

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю (2.4) и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии:

$$C_v = \frac{dU_m}{dT}, \quad (2.9)$$

т.е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_v равна изменению внутренней энергии 1 моля газа при повышении его температуры на 1 К. Согласно формуле (2.1),

$$dU_m = \frac{i}{2} R dT,$$

тогда
$$C_v = \frac{i}{2} R. \quad (2.10)$$

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение (2.8) можно записать в виде

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{pdV_m}{dT}.$$

Учитывая, что $\frac{dU_m}{dT}$ не зависит от вида процесса и всегда равна C_v (2.9);

продифференцировав уравнение Клапейрона–Менделеева $pV_m=RT$ по T ($p=\text{const}$), получим

$$C_p = C_v + R. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) называется **уравнением Майера**; оно показывает, что C_p всегда больше C_v на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, т.к. постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа.

Используя (2.10), выражение (2.11) можно записать в виде

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (2.11)$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа отношение C_p к C_v

$$\nu = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (2.12)$$

Из формул (2.10) и (2.11) следует, что молярные теплоемкости определяются лишь числом степеней свободы и не зависят от температуры. Это утверждение молекулярно-кинетической теории справедливо в довольно широком интервале температур лишь для одноатомных газов. Уже у двухатомных газов число степеней свободы, проявляющихся в теплоемкости, зависит от температуры. Молекула двухатомного газа обладает тремя поступательными, двумя вращательными а с повышением температуры добавляются одна колебательная степень свободы.

По закону равномерного распределения энергии по степеням свободы, для комнатных температур $C_v = \frac{7}{2} R$.

Из качественной экспериментальной зависимости молярной теплоемкости C_v водорода (рис. 58) следует, что C_v зависит от температуры; при низкой температуре ($\approx 50\text{K}$) $C_v = \frac{3}{2} R$, при комнатной - $C_v = \frac{5}{2} R$ (вместо расчетных $\frac{7}{2} R$) и очень высокой - $C_v = \frac{7}{2} R$.

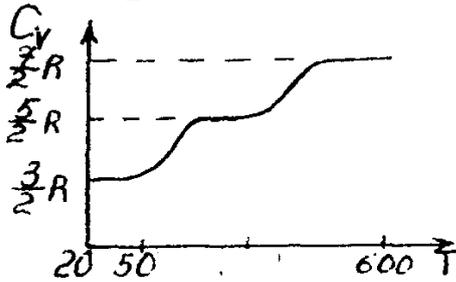


Рис. 58

Это можно объяснить, предположив, что при низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул, при комнатных - добавляется их вращение, а при высоких - к этим двум видам движения прибавляется еще и колебание молекул.

Расхождение теории и эксперимента нетрудно объяснить. Дело в том, что при вычислении теплоемкости надо учитывать квантование энергии вращения и колебаний молекул (возможны не любые вращательные и колебательные энергии, а лишь определенный дискретный ряд значений энергий). Если энергия теплового движения недостаточна, например, для возбуждения колебаний, то эти колебания не вносят своего вклада в теплоемкость (соответствующая степень свободы "замораживается" - к ней неприменим закон равномерного распределения энергии). Этим объясняется, что теплоемкость моля двухатомного газа - водорода - при комнатной температуре равна $\frac{5}{2} R$ вместо $\frac{7}{2} R$. Аналогично можно объяснить уменьшение теплоемкости при низкой температуре ("замораживаются" вращательные степени свободы) и увеличение при высокой ("возбуждаются" колебательные степени свободы).

2.5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Среди равновесных процессов, происходящих с термодинамическими системами, выделяются изопроцессы, при которых один из основных параметров состояния сохраняется постоянным.

Изохорный процесс ($V = \text{const}$). Диаграмма этого процесса (**изохора**) в координатах p, V изображается прямой, параллельной оси ординат (рис. 59), где процесс 1-2 есть изохорное нагревание, а 1-3 - изохорное охлаждение. При изохорном процессе газ не совершает работы над внешними телами, т.е.

$$\delta A = p dV = 0.$$

Для изохорного процесса следует, что вся теплота (рис. 59), сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии:

$$\delta Q = dU$$

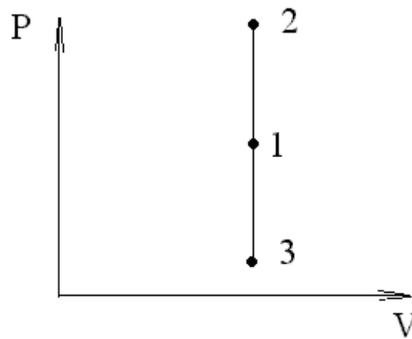


Рис. 59

Согласно формуле (2.9),

$$DU_m = C_v dT.$$

Тогда для произвольной массы газа получим

$$\delta Q = dU = m C_v \frac{T}{M}. \quad (2.13)$$

Изобарный процесс ($p = \text{const}$). Диаграмма этого процесса (**изобара**) в координатах p, V изображается прямой, параллельной оси V . При изобарном процессе работа газа при расширении объема от V_1 до V_2 равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \quad (2.14)$$

и определяется площадью прямоугольника, выполненного в цвете на рис. 60. Если использовать уравнение Клапейрона - Менделеева для выбранных нами двух состояний, то

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1, \quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2,$$

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{M} \frac{R}{p} (T_2 - T_1).$$

Тогда выражение (2.14) для работы изобарного расширения примет вид

$$A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1). \quad (2.15)$$

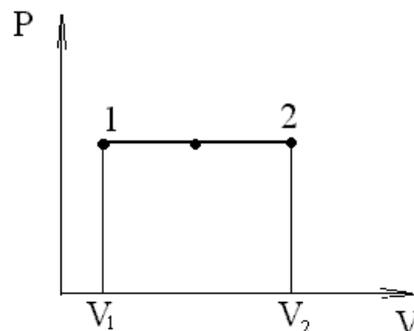


Рис. 60

Из этого выражения вытекает физический смысл молярной газовой постоянной R : если $T_2 - T_1 = 1$ К, то для 1 моля газа $R = A$, т.е. R численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при нагревании его на 1 К.

В изобарном процессе при сообщении газу массой m количества теплоты

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_p dT$$

его внутренняя энергия возрастает на величину (согласно формуле (2.9)).

$$\delta U = \frac{m}{M} C_v dT.$$

При этом газ совершит работу, определяемую выражением (2.14).

Изотермический процесс ($T = \text{const}$). Изотермический процесс описывается законом Бойля - Мариотта: $PV = \text{const}$.

Диаграмма этого процесса (**изотерма**) в координатах p, V представляет собой гиперболу (рис. 4б), расположенную на диаграмме тем выше, чем выше температура, при которой происходил процесс.

Исходя из выражений (2.5) и (2.9) найдем работу изотермического расширения газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Так как при $T = \text{const}$ внутренняя энергия идеального газа не изменяется

$$dU = \frac{m}{M} C_v dT = 0$$

то из первого начала термодинамики ($\delta Q = dU + \delta A$) следует, что для изотермического процесса

$$\delta Q = \delta A,$$

т.е. все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.16)$$

Следовательно, для того, чтобы при работе расширения температура не уменьшалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

2.6. Адиабатический процесс. Политропный процесс

Адиабатическим называется процесс, при котором отсутствует теплообмен ($\delta Q = 0$) между системой и окружающей средой. К адиабатическим процессам можно отнести все быстро протекающие процессы. Например, адиабатическим процессом можно считать процесс в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндре), в холодильных установках и т.д.

Из первого начала термодинамики ($\delta Q = dU + \delta A$) для адиабатического процесса следует, что

$$\delta A = -dU, \quad (2.17)$$

т.е. внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Используя выражение (2.5) и (2.9), для произвольной массы газа перепишем уравнение (2.45) в виде

$$pdV = -\frac{m}{M} C_v dT. \quad (2.18)$$

Продифференцировав уравнение состояния для идеального газа $pV = \frac{m}{M} RT$, получим

$$pdV + Vdp = \frac{m}{M} R dT. \quad (2.19)$$

Исключим из (2.18) и (2.19) температуру T :

$$\frac{pdV + Vdp}{pdV} = -\frac{R}{C_v} = -\frac{C_p - C_v}{C_v}.$$

Разделив переменные и учитывая, что $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$ (2.12), найдем

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от p_1 до p_2 и соответственно от V_1 до V_2 , а затем потенцируя, приходим к выражению

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma.$$

или

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Так как состояния 1 и 2 выбраны произвольно, то можно записать

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (2.20)$$

Полученное выражение есть **уравнение адиабатического процесса**, называемое также уравнением **Пуассона**.

Для перехода к переменным T , V или p , T исключим из (2.20) с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

соответственно давление или объем:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (2.21)$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (2.22)$$

Выражения (2.20)-(2.22) представляют собой уравнения адиабатического процесса. В этих уравнениях безразмерная величина

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} \quad (2.23)$$

называется **показателем адиабаты** (или **коэффициентом Пуассона**). Для одноатомных газов (Ne, He и др.), достаточно хорошо удовлетворяющих условию идеальности, $i=3$, $\gamma=1,67$. Для двухатомных газов (H_2 , N_2 , O_2 и др.) $i=5$, $\gamma=1,4$. Значения вычисленные по формуле (2.23), хорошо подтверждаются экспериментом.

Диаграмма адиабатического процесса (**адиабат а**) в координатах p, V изображается гиперболой (рис. 61).

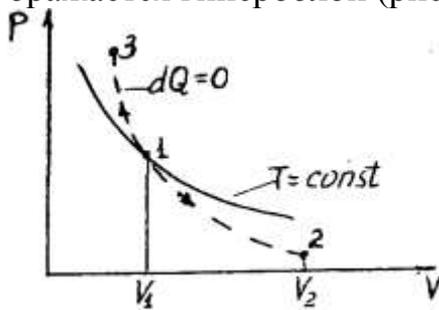


Рис. 61

На рисунке видно, что адиабата ($pV^\gamma = \text{const}$) более крута, чем изотерма ($pV = \text{const}$). Это объясняется тем, что при адиабатическом сжатии 1-3 увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры.

Вычислим работу, совершаемую газом в адиабатическом процессе. Запишем уравнение (2.18) в виде

$$\delta A = -\frac{m}{M} C_v dT.$$

Если газ адиабатически расширяется от объема V_1 до V_2 , то его температура уменьшается от T_1 до T_2 и работа расширения идеального газа

$$A = -\frac{m}{M} C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_v [T_2 - T_1]. \quad (2.24)$$

Применяя те же приемы, что и при выводе формулы (2.22), выражение (2.24) для работы при адиабатическом расширении можно преобразовать к виду

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении 1-2 (определяется заштрихованной площадью, выполненной на рис. 61), меньше, чем при изотермическом. Это объясняется тем, что при адиабатическом расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом - температура поддерживается постоянной за счет притока извне эквивалентного количества теплоты.

Рассмотренные изохорный, изобарный, изотермический и адиабатический процессы имеют общую особенность - они происходят при постоянной теплоемкости. В первых двух процессах теплоемкости соответственно равны C_v и C_p , в изотермическом процессе ($dT=0$) теплоемкость равна $\pm\infty$, в адиабатическом

($\delta Q=0$) теплоемкость равна нулю. Процесс, в котором теплоемкость остается постоянной, называется **политропным**.

Исходя из первого начала термодинамики при условии постоянства теплоемкости ($C=\text{const}$), можно вывести уравнение политропы:

$$pV^n = \text{const}, \quad (2.25)$$

где $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$ - показатель политропы. Очевидно, что при $C=0$, $n=\gamma$ из (2.25)

получается уравнение адиабаты; при $C=\infty$, $n=1$ - уравнение изотермы; при $C=C_p$, $n=0$ - уравнение изобары, при $C=C_v$, $n=\pm\infty$ - уравнение изохоры. Таким образом, все рассмотренные процессы являются частными случаями политропного процесса.

2.7. Круговой процесс (цикл). Обратимые и необратимые процессы

Круговым процессом (или **циклом**) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. На диаграмме процессов цикл изображается замкнутой кривой (рис. 62).

Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения (1-2) и сжатия (2-1) газа. Работа расширения (определяется площадью фигуры 1a2V₂V₁) положительна ($dV > 0$), работа сжатия (определяется площадью фигуры 2b1V₁V₂) отрицательна ($dV < 0$). Следовательно, работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Если за **цикл** совершается положительная работа $A = \oint pdV > 0$ (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется **прямым** (рис. 62,а), если за цикл совершается отрицательная работа $A = \oint pdV < 0$ (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется **обратным** (рис. 62,б).

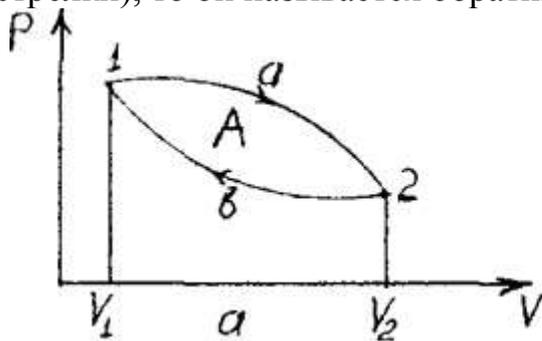


Рис. 62, а

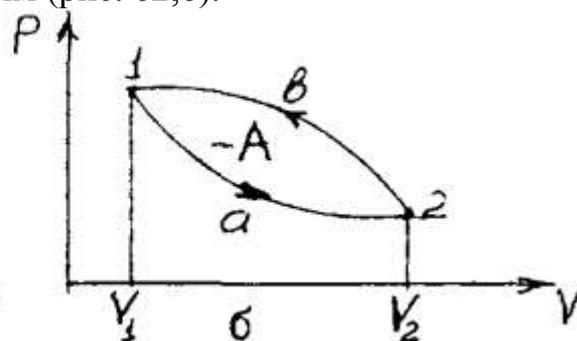


Рис. 62, б

Прямой цикл используется в тепловых двигателях – периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в холодильных машинах - периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю.

Работа совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q=Q_1-Q_2,$$

где Q_1 - количество теплоты, полученное системой, Q_2 - количество теплоты, отданное системой. Поэтому **термический коэффициент полезного действия для кругового процесса**

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (2.26)$$

Термодинамический процесс называется обратимым, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является необратимым.

Любой равновесный процесс является обратимым. Обратимые процессы - это идеализация реальных процессов. Их рассмотрение важно по двум причинам: многие процессы в природе и технике практически обратимы; обратимые процессы являются наиболее экономичными; имеют максимальный термический коэффициент полезного действия, что позволяет указать пути повышения КПД реальных тепловых двигателей.

2.8. Энтропия. Ее статистическое толкование и связь с термодинамической вероятностью

Понятие энтропии введено в 1865 г. Р.Клаузиусом. Для выяснения физического содержания этого понятия рассматривают отношение теплоты Q , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре T теплоотдающего тела, называемое **приведенным количеством теплоты**.

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса, равно $\frac{\delta Q}{T}$. Строгий теоретический анализ показывает, что приведенное количество теплоты, сообщаемое телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (2.27)$$

Из равенства нулю интеграла (2.27), взятого по замкнутому контуру следует, что подинтегральное выражение $\frac{\delta Q}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Таким образом,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (2.28)$$

Функция состояния, дифференциалом которой является $\frac{\delta Q}{T}$, называется **энтропией** и обозначается S .

Из формулы (2.27) следует, что для обратимых процессов изменение энтропии

$$\Delta S = 0. \quad (2.29)$$

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей необратимый цикл, возрастает:

$$\Delta S > 0. \quad (2.30)$$

Выражения (2.29) и (2.30) относятся только к замкнутым системам, если же система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом. Соотношения (2.29) и (2.30) можно представить в виде **неравенства Клаузиуса**

$$\Delta S \geq 0, \quad (2.31)$$

т.е. энтропия замкнутой системы может либо возрасть (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов).

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то, согласно (2.28), изменение энтропии

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}, \quad (2.32)$$

где подынтегральное выражение и пределы интегрирования надо выразить через величины, характеризующие исследуемый процесс. Формула (2.32) определяет энтропию лишь с точностью до аддитивной постоянной.

Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропии.

Исходя из выражения (2.32), найдем изменение энтропии в процессах идеального газа. Так как

$$dU = \frac{m}{M} C_v dT, \quad \delta A = p dV = \frac{m}{M} R T \frac{dV}{V},$$

то

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} C_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V},$$

или

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right), \quad (2.33)$$

т.е. изменение энтропии $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода $1 \rightarrow 2$.

Так как для адиабатического процесса $\delta Q = 0$, то $\Delta S = 0$ и, следовательно, $S = \text{const}$, т.е. адиабатический обратимый процесс протекает при постоянной энтропии. Из формулы (2.33) следует, что при изотермическом процессе ($T_1 = T_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

при изохорном процессе ($V_1 = V_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{M} \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Энтропия обладает свойством аддитивности: энтропия системы равна сумме энтропии тел, входящих в систему.

Более глубокий смысл энтропии вскрывается в статистической физике, энтропия связывается с термодинамической вероятностью состояния системы. **Термодинамическая вероятность** W состояния системы - это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние.

Согласно Больцману, энтропия S системы и термодинамическая вероятность связаны между собой следующим образом:

$$S = k \ln W, \quad (2.34)$$

где k - постоянная Больцмана. Таким образом, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Следовательно, энтропия может рассматриваться как мера вероятности состояния термодинамической системы. Формула Больцмана (2.34) позволяет дать энтропии следующее статистическое толкование: энтропия является мерой неупорядоченности системы. В самом деле, чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия - наиболее вероятного состояния системы - число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия. Так как реальные процессы необратимы, то можно утверждать, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии - **принцип возрастания энтропии**. При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных к более вероятным.

Сопоставляя выражения (2.31) и (2.34), видим, что энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы могут либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянными (в случае обратимых процессов).

Отметим, однако, что эти утверждения имеют место для систем, состоящих из очень большого числа частиц, но могут нарушаться в системах с малым числом частиц. Для "малых" систем могут наблюдаться флуктуации, т.е. энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы на определенном отрезке времени могут убывать, а не возрастать, или оставаться постоянными.

2.9. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить множество процессов, не противоречащих первому началу, в которых энергия сохраняется, а в природе они не

осуществляются. Появление второго начала термодинамики - необходимость дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет - определяет направление развития процессов.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса, **второе начало термодинамики** можно сформулировать как **закон возрастания энтропии** замкнутой системы при необратимых процессах: любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.

Можно дать наиболее краткую формулировку второго начала термодинамики: в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает. Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом (убывать, возрасти, оставаться постоянной). Кроме того, отметим еще раз, что энтропия остается постоянной в замкнутой системе при обратимых процессах. При необратимых процессах в замкнутой системе энтропия всегда возрастает.

2.10 Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его коэффициент полезного действия для идеального газа

Из формулировки второго начала термодинамики по Кельвину следует, что **вечный двигатель второго рода** – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты, - невозможен. Для иллюстрации этого положения рассмотрим работу теплового двигателя.

Принцип действия теплового двигателя приведен на рис.63. От термостата с более высокой температурой T_1 , называемого **нагревателем** за цикл отнимается количество теплоты Q_1 , а термостату с более низкой температурой T_2 , называемому **холодильником**, за цикл передается количество теплоты Q_2 , при этом совершается работа $A=Q_1-Q_2$.

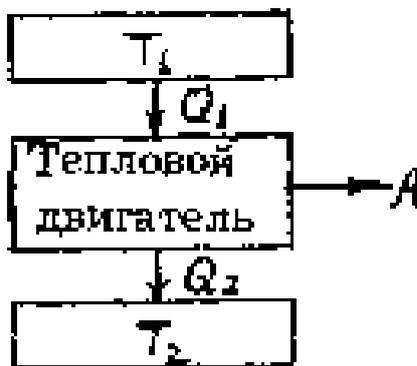


Рис. 63



Рис. 64

Чтобы термический коэффициент полезного действия теплового двигателя (2.26) был $\eta = 1$, должно быть выполнено условие $Q_2 = 0$, т.е. тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты, а это невозможно. Так, французский физик и инженер Н. Л. С. Карно показал, что для работы теплового двигателя не-

обходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами, иначе это противоречило бы второму началу термодинамики.

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в холодильной машине, принцип действия которой представлен на рис. 64.

Системой за цикл от термостата с более низкой температурой T_2 отнимается количество теплоты Q_2 и отдается термостату с более высокой температурой T_1 количество теплоты Q_1 . Для кругового процесса $Q=A$, но, по условию, $Q=Q_2-Q_1 < 0$, поэтому $A < 0$ и $Q_2 - Q_1 = -A$, или $Q_1 = Q_2 + A$, т.е. количество теплоты Q_1 , отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре T_1 , больше количества теплоты Q_2 , полученного от источника теплоты при более низкой температуре T_2 , на величину работы, совершенной над системой. Следовательно, без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому. Это утверждение есть не что иное, как второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса.

Однако второе начало термодинамики не следует представлять так, что оно совсем запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Ведь именно такой переход осуществляется в холодильной машине. Но при этом надо помнить, что внешние силы совершают работу над системой, т.е. этот переход не является единственным результатом процесса.

Основываясь на втором начале термодинамики, Карно вывел теорему носящую теперь его имя: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей (T_1) и холодильников (T_2), наибольшим кпд обладают обратимые машины; при этом кпд обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей (T_1) и холодильников (T_2), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела.

Карно теоретически проанализировал обратимый наиболее экономичный цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, и называемый циклом Карно. Рассмотрим прямой цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем.

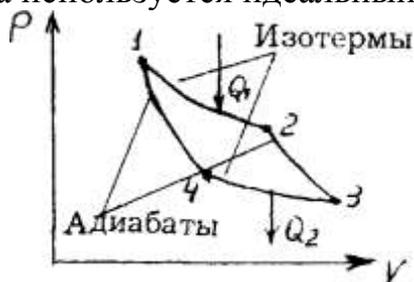


рис. 65

Цикл Карно изображен на рис. 65, где изотермические расширение и сжатие заданы соответственно кривыми 1-2 и 3-4, а адиабатические расширение и сжатие - кривыми 2-3 и 4-1.

При изотермическом процессе $U=\text{const}$, поэтому количество теплоты Q_1 , полученное газом от нагревателя, равно работе расширения A_{12} , совершаемой газом при переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$A = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \quad (2.35)$$

При адиабатическом расширении 2-3 теплообмен с окружающей средой отсутствует, и работа расширения A_{23} совершается за счет изменения внутренней энергии (2.17) и (2.24):

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1).$$

Количество теплоты Q_2 , отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии, равно A_{34}

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \quad (2.36)$$

Работа адиабатического сжатия

$$A_{41} = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

Работа, совершаемая в результате кругового процесса,

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2$$

и, как можно показать, определяется площадью, выполненной на рис. 65.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Применив уравнение для адиабат 2-3 и 4-1, получим

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}, \quad (2.37)$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Подставляя (2.35) и (2.36) в формулу (2.26) и учитывая (2.37), получим

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (2.38)$$

т.е. для цикла Карно КПД действительно определяется только температурами нагревателя и холодильника. Для его повышения необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника. Например, при $T=400$ К и $T=300$ К $\eta=0,25$. Если же температуру нагревателя повысить на 100 К, а температуру холодильника понизить на 50 К, то $\eta=0,5$. КПД всякого реального теплового двигателя из-за трения и неизбежных тепловых потерь гораздо меньше вычисленного для цикла Карно.